前 言

这是配合即将出版的《微分几何》(第三版)的教学参考书。《微分几何》自从1987年出版以来,被国内许多高等院校的数学专业作为教材,我们深表感谢。但是由于国内的高等院校数学专业的师资条件和学生质量很不平衡,而我们的教材又力求用近代的观点来讲授微分几何的基础内容,所以这样一本与教材配套的教学参考书对于部分教师和学生,使他们能更好地掌握教材的内容,是必要的。

我们这本书的主题思想有两个:一是学习指导,二是习题选解。在"学习指导"部分,我们突出了《微分几何》教材中的重点和难点以及解题所需要的基本概念和基本公式。不过,为了尽量避免和教材重复,对于基本概念,我们只列出名词,具体内容读者可以查阅原教材。读者使用这本辅导书时,必须紧密结合原教材,"学习指导"只起加深对原教材的理解和复习巩固作用,同时为解题做好准备。"习题选解"分成两部分:一部分是习题,除了教材中的习题以外,我们还选了一些其他教材中的习题,它们分散列于有关章节的后面;另一部分是习题选解和解题指导,放在这本书的最后。

这本书是我和首都师范大学数学系王汇淳副教授共同编写的。他负责前两章,我负责后两章。我们希望使用这本书的高等院校数学专业的同志对本书中的错误和不足之处,予以批评指正。

梅向明

2003年5月于首都师范大学

目　　录

第一部分　学习指导及习题

第二部分　解题指导与答案

第一部分　学习指导及习题

微分几何的发展，就其使用的数学方法而言可以分为三个阶段．第一阶段由牛顿（Newton）和莱布尼茨（Leibniz）创立微积分开始，直至 18 世纪初，在此期间，欧拉（Euler）作出了巨大贡献．到了 1827 年，高斯（Gauss）在曲面论的研究方面有了重大突破——发现曲面的高斯曲率的内蕴性，开始了微分几何发展的第二阶段．这一阶段基本形成了经典微分几何的内容和体系，使用的数学方法是向量分析的方法．1885 年，德国数学家黎曼（Riemann）把高斯的内蕴几何思想进一步发展，并使用和发展了一套完整的张量分析的算法，展开了黎曼几何的一般理论．微分几何发展的第三个阶段是以法国数学家嘉当（Cartan）发展外微分法和活动标架理论为标志，数学大师嘉当精巧地把李群论与微分几何结合起来，外微分和活动标架法就成为这一阶段研究问题的重要数学方法．

《微分几何（第三版）》教材首先应用向量分析的方法介绍曲线与曲面的理论．篇首作为预备知识，先讲向量函数的概念和性质，尔后用两章的篇幅介绍曲线和曲面的一般理论．第三章介绍外微分形式和活动标架法，第四章讲述了整体微分几何中的一些重要定理．本参考书将对教材中习题作出选解，并增补少量习题供读者练习．

第一章 曲 线 论

§1 向 量 函 数

1.1 向量函数的极限

(1) 主要概念:向量函数的**定义**,向量函数的**极限**.

(2) 主要定理:

命题 1 如果 $\boldsymbol{r}(t)$和 $\boldsymbol{s}(t)$是两个一元向量函数,$\lambda(t)$是一个实函数,并且当 $t\to t_0$ 时,这些函数的值趋向于极限 $\boldsymbol{r}(t)\to\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{s}(t)\to\boldsymbol{b}$,$\lambda(t)\to m$,则有

① $\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)\to\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$;

② $\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)\to m\boldsymbol{a}$;

③ $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)\to\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;

④ $\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)\to\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

1.2 向量函数的连续性

(1) 主要概念:向量函数的**连续**.

(2) 主要定理:

命题 2 如果 $\boldsymbol{r}(t)$和 $\boldsymbol{s}(t)$是在 t_0 点连续的向量函数,而 $\lambda(t)$是在 t_0 点连续的实函数,则向量函数 $\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)$,$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)$,$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}(t)$和实函数 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)$也都在 t_0 点连续.

1.3 向量函数的微商及泰勒(Taylor)展开式

(1) 主要概念:向量函数的**微商**,C^0 **类函数**,C^k **类函数**,C^∞ **类函数**,C^ω **类函数**.

(2) 主要性质:

命题 3 设 $\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{s}(t),\boldsymbol{u}(t)$分别是可微的向量函数,$\lambda(t)$是可微的实函数,则 $\lambda(t)\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t),\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t),\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t),(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{s}(t),\boldsymbol{u}(t))$都是可微的,并且

$$(\lambda\boldsymbol{r})'=\lambda'\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{r}',$$

$$(\boldsymbol{r}\pm\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\pm\boldsymbol{s}',$$

$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}',$$

$$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})'=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}',$$

$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})'=(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}',\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u}').$$

命题 4 如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$在$[t_1,t_2]$上是 C^k 类函数,则向量函数所对应的三个实函数 $x(t),g(t),z(t)$在$[t_1,t_2]$上也是 C^k 类函数.

定理 设向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$在$[t_0,t_0+\Delta t]$上是 C^{k+1}类函数,则有泰勒展开式

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\Delta t\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{1}{2!}(\Delta t)^2\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots+\frac{1}{n!}(\Delta t)^n\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+\frac{1}{(n+1)!}(\Delta t)^{n+1}[\boldsymbol{r}^{(n+1)}(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon}(t_0,\Delta t)],$$

其中 $\Delta t\to 0$ 时,$\boldsymbol{\varepsilon}(t_0,\Delta t)\to\boldsymbol{0}$.

当 $\boldsymbol{r}(t)\in C^\infty$ 时,可以展成泰勒级数.即

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\Delta t\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{1}{2!}(\Delta t)^2\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots+\frac{1}{n!}(\Delta t)^n\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+\cdots.$$

如果 $\boldsymbol{r}(t)\in C^\omega$ 类,则上述泰勒级数是收敛的.

1.4 向量函数的积分

(1) 主要概念:**向量函数的积分**.

(2) 主要性质:

命题 5 如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$是区间$[a,b]$上的连续函数,则积分

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t$$

存在,且

① $a<c<b$ 时有

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\int_a^c \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t+\int_c^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t;$$

② m 是常数时有

$$\int_a^b m\boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=m\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t;$$

③ $\boldsymbol{m}$ 是常向量时有

$$\int_a^b \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{m}\cdot\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t;$$

$$\int_a^b \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{m}\times\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t;$$

④ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^x \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t\right]=\boldsymbol{r}(x)$.

命题 6 向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$具有固定长的充要条件是对 t 的每一个值,$\boldsymbol{r}'(t)$都与 $\boldsymbol{r}(t)$垂直.

定义 对于函数 $\boldsymbol{r}(t)$,给 t 以增量 Δt,用 $\Delta\varphi$ 表示由向量 $\boldsymbol{r}(t)$和 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$所组成的角,作比值$\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$,当 Δt 趋于零时,$\left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|$的极限称为向量函数$\boldsymbol{r}(t)$对于它的变量 t 的旋转速度.

命题 7 单位向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$关于 t 的旋转速度等于其微商的模$|\boldsymbol{r}'(t)|$.

习题 1.1

1 求证常向量的微商等于零向量.

2 证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}(t)}{\rho(t)}\right)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)\rho(t)-\boldsymbol{r}(t)\rho'(t)}{\rho^2(t)}.$$

3 利用向量函数的泰勒公式证明:如果向量函数在某一区间内所有点处的微商都是零,则此向量函数在此区间内是常向量.

4 证明 $\boldsymbol{r}(t)$具有固定方向的充要条件是

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{0}.$$

5 证明 $\boldsymbol{r}(t)$平行于固定平面的充要条件是

$$(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t))=0.$$

6 求下列向量微分方程的解:

(1) $\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{0}$;

(2) $\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{a}$;

(3) $\boldsymbol{r}'(t)=t\boldsymbol{a}$;

(4) $\boldsymbol{r}'(t)=a\boldsymbol{r}(t)$.

7 试举例说明对于向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,一般不成立中值定理:

$$\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)=\boldsymbol{r}'(\xi)(b-a),a<\xi<b.$$

§2 曲线的概念

(1) 主要概念:曲线的定义、曲线的**参数方程**、曲线的**向量参数表示**、**光滑曲线**、C^k **类曲线**、**曲线上的正常点**、**正则曲线**、曲线的**切线和法面**、曲线上的**自然参数**、曲线的**弧长**.

(2) 主要公式:

设曲线(C)的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,其上一点 P 所对应的参数为

t_0，曲线(C)在 P 点处的切向量为$\boldsymbol{r}'(t)$. 在 P 点处的切线方程为：

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0)=\lambda\boldsymbol{r}'(t_0),$$

其中 $\boldsymbol{\rho}=\{X,Y,Z\}$是切线上任一点的向径，$\lambda$ 是切线上点的参数.

切线方程的坐标表示为：

$$\frac{X-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{Y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{Z-z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

t_0 点处的法面方程为：

$$[\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0)]\cdot\boldsymbol{r}'(t_0)=0.$$

用坐标表示为：

$$[X-x(t_0)]x'(t_0)+[Y-y(t_0)]y'(t_0)+[Z-z(t_0)]z'(t_0)=0.$$

曲线从 $\boldsymbol{r}(a)$到 $\boldsymbol{r}(t)$的弧长为：

$$\sigma(t)=\int_a^t|\boldsymbol{r}'(t)|\mathrm{d}t\quad(t>a).$$

曲线的自然参数为：

$$s=\sigma(t).$$

将

$$t=\sigma^{-1}(s)$$

代入曲线(C)的方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),$$

称为曲线的自然参数方程. 由于

$$|\boldsymbol{r}'(s)|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=1,$$

所以曲线(C)的方程在引入自然参数后，切向量 $\boldsymbol{r}'(s)$是单位向量. $\boldsymbol{r}'(s)$特别记为 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$.

(3) 例题：

求双曲螺线 $\boldsymbol{r}=\{a\cosh t,a\sinh t,at\}$从 $t=0$ 起计算的弧长.

解 $\boldsymbol{r}=\{a\cosh t,a\sinh t,at\}$,

$$\boldsymbol{r}' = \{a\sinh t, a\cosh t, a\}.$$

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \int_0^t |\boldsymbol{r}'(t)|\mathrm{d}t = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^t \sqrt{a^2\sinh^2 t + a^2\cosh^2 t + a^2}\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}a\sinh t.\end{aligned}$$

习题 1.2

1 证明圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(t) = \{\cos t, \sin t, t\}$ 是正则曲线，并求它上面的点 $(1,0,0)$ 处的切线和法面.

2 求三次挠曲线 $\boldsymbol{r}(t) = \{at, bt^2, ct^3\}$ 在 t_0 点的切线和法面.

3 证明：$\boldsymbol{r}(t) = \{\sin 3t\cos t, \sin 3t\sin t, 0\}$ 是正则曲线，并求曲线在 $t = \frac{\pi}{3}$ 处的切线方程.

4 下列哪些是正则曲线，求每条曲线在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

(1) $\boldsymbol{r}_1(\theta) = \{\cos\theta, 1 - \cos\theta - \sin\theta, -\sin\theta\}$;

(2) $\boldsymbol{r}_2(\theta) = \{2\sin^2\theta, 2\sin^2\theta\tan\theta, 0\}$;

(3) $\boldsymbol{r}_3(\theta) = \{\cos\theta, \cos^2\theta, \sin\theta\}$.

5 证明圆柱螺线 $\boldsymbol{r} = \{a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta\}$ $(-\infty < \theta < \infty)$ 的切线与 z 轴作固定角.

6 设 $\boldsymbol{r}(\theta) = \{e^\theta\cos\theta, e^\theta\sin\theta, 0\}$，证明 $\boldsymbol{r}(\theta)$ 与曲线的切向量成定角（具有这种性质的曲线称为对数螺线）.

7 设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是一正则曲线. 假定有一点 $A \in \mathbf{R}^3$，使得对所有的 t，$\boldsymbol{r}(t) - \overrightarrow{OA}$ 正交于 $\boldsymbol{r}'(t)$. 证明 $\boldsymbol{r}(t)$ 在球面上.

8 证明曲线 (C)：$\boldsymbol{r} = \{2t, \sqrt{3}t^2, t^3\}$ 的切线与直线 $y = z - x = 0$ 交于定角.

9　求曲线(C)：$\boldsymbol{r}(t)=\{e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\}$在 $t=0$ 点的切线方程.

10　求曲线(C)：$F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0$ 的切线与法面的方程.

11　求曲线(C)：$x^2+y^2=1, y^2+z^2=1$ 的法面方程.

12　求悬链线(C)：$\boldsymbol{r}=\left\{t, a\cosh\frac{t}{a}, 0\right\}(-\infty<t<\infty)$，从 $t=0$ 起计算的弧长.

13　求抛物线 $y=bx^2$ 对应于 $-a\leqslant x\leqslant a$ 的一段弧长.

14　求星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 的 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ 一段的弧长.

15　求旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$在 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 一段的弧长.

16　求圆柱螺线 $x=3a\cos t, y=3a\sin t, z=4at$ 从它与 xOy 平面的交点到任意点 $M(t)$的弧长.

17　求曲线 $x^3=3a^2y, 2xz=a^2$ 在平面 $y=\frac{a}{3}, y=9a$ 之间的弧长.

18　求双曲螺线 $x=a\cosh t, y=a\sinh t, z=at$ 从 $t=0$ 到 $t=t$ 之间的弧长.

19　求曲线 $x=2a(\arcsin t+t\sqrt{1-t^2}), y=2at^2, z=4at$，从 $t=t_1$ 到 $t=t_2$ 之间的弧长.

20　求曳物线 $\boldsymbol{r}(\varphi)=\{a\cos\varphi, a\ln(\sec\varphi+\tan\varphi)-a\sin\varphi, 0\}(0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2})$从 $\varphi=0$ 算起的弧长. 并证明：在它的每一条切线上，从切点到 y 轴间的一段长总等于a(参数 φ 是切线和x 轴所成的角).

21　求封闭曲线 $\boldsymbol{r}=\{\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t\}$的全长.

22　若曲线由 $F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0$ 给出，试求这

条曲线的弧长.

23 试求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与柱面 $x^2+y^2=b^2(b<a)$ 的交线的弧长($a>0,b>0$).

24 将圆柱螺线 $\boldsymbol{r}=\{a\cos t,a\sin t,bt\}$ 化为自然参数表示.

25 求双曲螺线 $\boldsymbol{r}=\{a\cosh t,a\sinh t,at\}$ 的自然参数表示.

26 求曲线 $\boldsymbol{r}=\{\mathrm{e}^t\cos t,\mathrm{e}^t\sin t,\mathrm{e}^t\}$ 的自然参数表示.

27 已知平面曲线的极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$,求在极坐标中曲线的弧长公式.

28 已知曲线在空间柱面坐标系中的方程 $\rho=\rho(t)$, $\varphi=\varphi(t)$, $z=z(t)$,求在此系中曲线弧长的公式.

29 已知在空间球面坐标系中曲线的方程 $\rho=\rho(t)$, $\varphi=\varphi(t)$, $\theta=\theta(t)$,求在此系中曲线弧长的公式.

30 设曲线(C):$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$的每一点处的切向量 $\boldsymbol{r}'(t)$都垂直于常向量 $\boldsymbol{a}$,且 $\boldsymbol{r}(0)$也垂直于 $\boldsymbol{a}$,则(C)的每一点的定位向量$\boldsymbol{r}(t)$也垂直于 $\boldsymbol{a}$.

§3 空间曲线

3.1 空间曲线的密切平面

(1) 主要概念:空间曲线在一点处的**密切平面**,曲线上的**逗留点**.

(2) 主要公式:

对于 C^2 类曲线(C):$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,其上一点 t_0 处的密切平面方程为:

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(t_0),\boldsymbol{r}'(t_0),\boldsymbol{r}''(t_0))=0$$

或

$$\begin{vmatrix} X-x(t_0) & Y-y(t_0) & Z-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}=0.$$

若曲线(C)用自然参数表示:$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,密切平面的方程为:

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(s_0),\dot{\boldsymbol{r}}(s_0),\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0))=0$$

或

$$\begin{vmatrix} X-x(s_0) & Y-y(s_0) & Z-z(s_0) \\ \dot{x}(s_0) & \dot{y}(s_0) & \dot{z}(s_0) \\ \ddot{x}(s_0) & \ddot{y}(s_0) & \ddot{z}(s_0) \end{vmatrix}=0.$$

(3) 例题:

求螺线 $\boldsymbol{r}=\{\cos t,\sin t,t\}$在(1,0,0)点处的密切平面.

解 把点(1,0,0)代入所给曲线的方程,得 $t=0$,由所给曲线方程可以求出

$$\boldsymbol{r}'=\{-\sin t,\cos t,1\},$$

$$\boldsymbol{r}''=\{-\cos t,-\sin t,0\}.$$

把 $t=0$ 代入得

$$\boldsymbol{r}(0)=\{1,0,0\},$$

$$\boldsymbol{r}'(0)=\{0,1,1\},$$

$$\boldsymbol{r}''(0)=\{-1,0,0\}.$$

所求密切平面的方程为

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y & Z \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

即

$$Y-Z=0.$$

3.2 空间曲线的基本三棱形

(1) 主要概念:曲线(C)上 P 点处的**单位切向量**、**主法向量**、

副法向量、伏雷内(Frenet)标架、基本向量、基本三棱形、法平面、从切平面、切线、主法线、副法线.

(2) 主要公式:

① $\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{r}}(s)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s},\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$.

② $\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|}=\dfrac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|},\boldsymbol{\beta}=\dfrac{(\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t))\boldsymbol{r}''(t)-(\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}''(t))\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)||\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}$.

③ $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}=\dfrac{\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}$.

④ 密切平面的方程:

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$$

或

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}})=0,(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')=0.$$

⑤ 法平面的方程:

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\alpha}=0$$

或

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0,(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r}'=0.$$

⑥ 从切平面的方程:

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\beta}=0$$

或

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=0.$$

⑦ 切线的方程:

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0)=\lambda\boldsymbol{r}'(t_0),\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s_0)=\lambda\dot{\boldsymbol{r}}(s_0)$$

或

$$\frac{X-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{Y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{Z-z(t_0)}{z'(t_0)},\ \frac{X-x(s_0)}{\dot{x}(s_0)}=\frac{Y-y(s_0)}{\dot{y}(s_0)}=\frac{Z-z(s_0)}{\dot{z}(s_0)}.$$

⑧ 主法线的方程:

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{\beta}$$

或

$$\begin{cases}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0\\(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\alpha}=0.\end{cases}$$

⑨ 副法线的方程：

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{\gamma}$$

或

$$\begin{cases}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\alpha}=0\\(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\beta}=0.\end{cases}$$

(3) 例题：

计算螺旋线 $\boldsymbol{r}=\{\cos t,\sin t,t\}$ 在(1,0,0)点处的切线，法平面，副法线，密切平面，主法线，从切平面的方程以及基本向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$.

解　由所给曲线计算出

$$\boldsymbol{r}'=\{-\sin t,\cos t,1\},$$
$$\boldsymbol{r}''=\{-\cos t,-\sin t,0\}.$$

(1,0,0)点对应的参数为 $t=0$. 所以

$$\boldsymbol{r}(0)=\{1,0,0\},\boldsymbol{r}'(0)=\{0,1,1\},\boldsymbol{r}''(0)=\{-1,0,0\}.$$

① 切线方程为：

$$\frac{X-1}{0}=\frac{Y-0}{1}=\frac{Z-0}{1},$$

即

$$\begin{cases}X-1=0,\\Y-Z=0.\end{cases}$$

② 法平面的方程为：

$$(X-1)\cdot 0+(Y-0)\cdot 1+(Z-0)\cdot 1=0,$$

即

$$Y+Z=0.$$

③ 密切平面的方程为：

$$\begin{vmatrix}X-1, & Y & Z\\0 & 1 & 1\\-1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

即

$$-Y+Z=0.$$

④ 主法线方程为：

$$\begin{cases} Y+Z=0, \\ -Y+Z=0, \end{cases}$$

即
$$Y=Z=0.$$

⑤ 从切平面的方程：

由于从切平面与主法线垂直，从主法线方程可知，它的方向向量是$\{1,0,0\}$，所以从切平面的方程是：

$$(X-1)\cdot 1+(Y-0)\cdot 0+(Z-0)\cdot 0=0,$$

即

$$X-1=0.$$

⑥ 副法线方程为：

$$\begin{cases} Y+Z=0, \\ X-1=0. \end{cases}$$

⑦ 基本向量：

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}_1'|}\bigg|_{t=0}=\frac{\{-\sin t,\cos t,1\}}{\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}}\bigg|_{t=0}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{0,1,1\}.$$

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}''-(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}'')\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'||\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}\bigg|_{t=0}$$

$$=\frac{\{-2,0,0\}-\{0,0,0\}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\{-1,0,0\}.$$

$$\boldsymbol{\gamma}=\frac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}_1'\times\boldsymbol{r}''|}=\frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{2}}=\frac{\{0,-1,1\}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{0,-1,1\}.$$

3.3 空间曲线的曲率、挠率和伏雷内公式

(1) 主要概念:

空间曲线的曲率、挠率、伏雷内公式、密切圆(曲率圆)、曲率中心、曲率半径、平面曲线、挠曲线.

(2) 主要公式和重要结论:

① 曲率 k

$$k(s)=|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|,k(t)=\frac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}.$$

② 挠率 τ

$$\tau(s)=\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\beta}=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})}{k^2}=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|^2}.$$

$$\tau(t)=\frac{(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')}{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')^2}.$$

③ 伏雷内公式

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\alpha}}=k(s)\boldsymbol{\beta},\\ \dot{\boldsymbol{\beta}}=-k(s)\boldsymbol{\alpha}+\tau(s)\boldsymbol{\gamma},\\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}=-\tau(s)\boldsymbol{\beta},\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{\alpha}}\\ \dot{\boldsymbol{\beta}}\\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k(s) & 0\\ -k(s) & 0 & \tau(s)\\ 0 & -\tau(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}\end{pmatrix}.$$

④ 曲率恒等于零的曲线是直线,反之亦然.

⑤ 挠率恒等于零的曲线是平面曲线,反之亦然.

(3) 例题:

① 求圆柱螺线 $\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,a\sin\theta,b\theta\}\quad(-\infty<\theta<+\infty)$ 的曲率和挠率.

解 先计算

$$r' = \{-a\sin\theta, a\cos\theta, b\},$$
$$r'' = \{-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0\},$$
$$r''' = \{a\sin\theta, -a\cos\theta, 0\},$$

于是有

$$|r'| = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$r'\times r'' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & b \\ -a\cos\theta & -a\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \{ab\sin\theta, -ab\cos\theta, a^2\},$$

$$|r'\times r''| = \sqrt{a^2b^2+a^4}$$

代入曲率和挠率的公式得

$$k = \frac{|r'\times r''|}{|r'|^3} = \frac{a}{a^2+b^2},$$

$$\tau = \frac{(r', r'', r''')}{|r'\times r''|^2} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

② 证明:若曲线的所有法平面包含非零常向量,则此曲线是直线或平面曲线.

证法一 设所给的常向量为 $e\neq 0$,则 $\alpha\perp e$.所以

$$\alpha\cdot e = 0.$$

两边对 s 求微商得

$$\dot{\alpha}\cdot e = 0,$$

即

$$k\beta\cdot e = 0.$$

若 $k=0$,则曲线是直线.

若 $\beta\cdot e=0$,则 $\beta\perp e$,于是

$$\dot{\beta}\cdot e = 0,$$

$$(-k\alpha+\tau\gamma)\cdot e = 0, \ -k\alpha\cdot e+\tau\gamma\cdot e = 0,$$

由于 $\alpha\cdot e=0$,所以有

$$\tau\gamma\cdot e = 0.$$

由 $e\perp\alpha, e\perp\beta$ 可知 $e/\!/\gamma$,从而 $e\cdot\gamma\neq 0$,所以

$$\tau = 0,$$

即曲线为平面曲线.

证法二 已知常向量 $\boldsymbol{e}$ 含于法平面上,从而 $\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 共面.设

$$\boldsymbol{e}=\lambda(s)\boldsymbol{\beta}(s)+\mu(s)\boldsymbol{\gamma}(s).$$

两边对 s 求微商,得

$$0=\dot{\lambda}(s)\boldsymbol{\beta}+\lambda(s)\dot{\boldsymbol{\beta}}+\dot{\mu}(s)\boldsymbol{\gamma}+\mu(s)\dot{\boldsymbol{\gamma}}.$$

使用伏雷内公式得

$$-k(s)\lambda(s)\boldsymbol{\alpha}+(\dot{\lambda}(s)-\mu(s)\tau(s))\boldsymbol{\beta}+(\dot{\mu}(s)+\lambda(s)\tau(s))\boldsymbol{\gamma}=0,$$

由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关,则有

$$\begin{cases}-k(s)\lambda(s)=0, & (1)\\ \dot{\lambda}(s)-\mu(s)\tau(s)=0, & (2)\\ \dot{\mu}(s)+\lambda(s)\tau(s)=0. & (3)\end{cases}$$

根据(1)式,若 $k=0$,则曲线是直线;若 $\lambda=0$,则由(3)式可知

$$\mu(s)=\text{常数}\neq 0$$

(否则,由 $\lambda=\mu=0$ 可知 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}$,得出矛盾),所以根据(2)有

$$\tau=0,$$

即曲线是平面曲线.

3.4 空间曲线在一点邻近的结构

(1) 主要概念:曲线在一点 t_0 处附近的**近似方程**,近似曲线在基本三棱形的三个平面上的**投影**.

(2) 主要公式:

取$[\boldsymbol{r}(s_0);\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\beta}_0,\boldsymbol{\gamma}_0]$为坐标系,曲线在 s_0 点邻近的近似方程为:

$$\begin{cases}\xi=s,\\ \eta=\dfrac{1}{2}k_0s^2,\\ \zeta=\dfrac{1}{6}k_0\tau_0s^2.\end{cases}$$

其中 k_0 是 $s=s_0$ 点处的曲率,τ_0 是该点处的挠率.s 是以 s_0 点为

计算弧长的始点时，Δs 的值，即 $s_0=0, \Delta s=s$.

近似曲线在密切平面上的投影是

$$\begin{cases}\eta=\dfrac{1}{2}k_0\xi^2, \\ \zeta=0,\end{cases} \quad \text{抛物线}.$$

在法平面上的投影是

$$\begin{cases}\zeta^2=\dfrac{2\tau_0^2}{9k_0}\eta^3, \\ \xi=0,\end{cases} \quad \text{半立方抛物线}.$$

在从切平面上的投影是

$$\begin{cases}\zeta=\dfrac{1}{6}k_0\tau_0\xi^3, \\ \eta=0,\end{cases} \quad \text{立方抛物线}.$$

3.5 空间曲线论的基本定理

(1) 主要概念：**自然方程**.

(2) 主要性质：

曲线论的基本定理：给出闭区间 $[s_0, s_1]$ 上的两个连续函数 $\varphi(s)>0$、$\psi(s)$，则除了空间的位置差别外，惟一地存在一条空间曲线，使得参数 s 是曲线的自然参数，并且 $\varphi(s)$ 和 $\psi(s)$ 分别为曲线的曲率和挠率，即曲线的自然方程为 $k=\varphi(s), \tau=\psi(s)$.

为了确定曲线的位置，可设 $s=s_0$ 时，曲线对应空间 P_0 点，并且在该点的基本向量为给定的两两正交的右手系的单位向量 $\boldsymbol{\alpha}_0$，$\boldsymbol{\beta}_0$，$\boldsymbol{\gamma}_0$，则曲线在空间的形状与位置惟一确定.

3.6 一般螺线

(1) 主要概念：**一般螺线**.

(2) 主要结论：

一般螺线的一种标准方程：

$$\boldsymbol{r}=\{x(s),y(s),s\cos\omega\},$$

其中 ω 是常数.

定理 1　曲线是一般螺线的充要条件是切线和固定方向成固定角.

定理 2　曲线是一般螺线的充要条件是主法线与固定方向垂直.

定理 3　曲线为一般螺线的充要条件是副法线与一个固定方向作固定角.

定理 4　曲线为一般螺线的充要条件是曲率和挠率的比为一常数.

(3) 例题:

证明曲线为一般螺线的充要条件是向量

$$\boldsymbol{\Omega}=\tau\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\gamma}$$

具有固定方向.

证法一　$\boldsymbol{\Omega}$ 有固定方向$\Leftrightarrow\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{0}$,

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Omega}}&=\dot{\tau}\boldsymbol{\alpha}+\tau\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\dot{k}\boldsymbol{\gamma}+k\dot{\boldsymbol{\gamma}}\\&=\dot{\tau}\boldsymbol{\alpha}+\dot{k}\boldsymbol{\gamma},\\\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{\Omega}}&=(\tau\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\gamma})\times(\dot{\tau}\boldsymbol{\alpha}+\dot{k}\boldsymbol{\gamma})\\&=-\tau\dot{k}\boldsymbol{\beta}+k\dot{\tau}\boldsymbol{\beta}=(k\dot{\tau}-\tau\dot{k})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{0}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\dot{\tau}}{\tau}=\frac{\dot{k}}{k}$$

$$\Leftrightarrow\left[\ln\left(\frac{k}{\tau}\right)\right]^{\bullet}=0\quad\Leftrightarrow\quad\ln\left(\frac{k}{\tau}\right)=\text{const}$$

$$\Leftrightarrow\frac{k}{\tau}=\text{const}\ \text{曲线是一般螺线}.$$

证法二　设 $\boldsymbol{\Omega}=|\boldsymbol{\Omega}|\boldsymbol{e}$,则 $\boldsymbol{e}$ 是单位向量.

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{\alpha}\cos\varphi+\boldsymbol{\gamma}\sin\varphi.$$

$\boldsymbol{\Omega}$ 有固定方向$\Leftrightarrow\boldsymbol{e}$ 为常向量

$\Leftrightarrow\quad(k\cos\varphi-\tau\sin\varphi)\boldsymbol{\beta}+(\boldsymbol{\gamma}\cos\varphi-\boldsymbol{\alpha}\sin\varphi)\dot{\varphi}=\boldsymbol{0}.$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\varphi}=0 \\ k\cos\varphi-\tau\sin\varphi=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{k}{\tau}=0$$

$\Leftrightarrow$ 曲线为一般螺线.

习题 1.3

1 求圆柱螺线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ 在任意点的密切平面的方程.

2 求曲线 $x=t\sin t, y=t\cos t, z=te^t$ 在原点的密切平面、法平面、从切平面、切线、主法线方程.

3 证明圆柱螺线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ 的主法线和 z 轴垂直相交.

4 在曲线 $x=\cos\alpha\cos t, y=\cos\alpha\sin t, z=t\sin\alpha$ 的副法线的正向取单位长,求其端点组成的新曲线的密切平面.

5 证明球面曲线的法平面通过球的中心.

6 证明过原点平行于圆柱螺线 $\boldsymbol{r}=\{a\cos t, a\sin t, bt\}$ 的副法线的直线轨迹是锥面 $a^2(x^2+y^2)=b^2z^2$.

7 求下面曲线的曲率和挠率:

(1) $\boldsymbol{r}=\{a\cosh t, a\sinh t, at\}$;

(2) $\boldsymbol{r}=\{a(3t-t^3), 3at^2, a(3t+t^3)\}, (a>0)$.

8 曲线 $\boldsymbol{r}=\{\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t\}$,求:

(1) 基本向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$;

(2) 曲率和挠率;

(3) 验证伏雷内公式.

9 证明如果曲线的所有切线都经过一个定点,则此曲线是直线.

10 证明:如果曲线的所有密切平面都经过一个定点,则此曲线是平面曲线.

11　证明：如果一条曲线的所有法平面包含常向量 e，那么这曲线是直线或平面曲线.

12　证明：曲率为常数的空间曲线的曲率中心的轨迹仍是曲率为常数的曲线.

13　证明：曲线 $x=1+3t+2t^2, y=2-2t+5t^2, z=1-t^2$ 为平面曲线，并求出它所在平面的方程.

14　设在两条曲线 Γ、$\overline{\Gamma}$ 的点之间建立了一一对应关系，使它们在对应点的切线平行，证明它们在对应点的主法线以及副法线也分别平行.

15　设两条曲线 Γ、$\overline{\Gamma}$ 的点之间建立了一一对应关系，使它们在对应点的主法线总是互相平行，证明它们在对应点的切线作成固定角.

16　若曲线 Γ 的主法线是曲线 $\overline{\Gamma}$ 的副法线，Γ 的曲率、挠率分别为 k、τ，求证 $k=\lambda_0(k^2+\tau^2)$，其中 λ_0 是常数.

17　曲线 $\boldsymbol{r}=\{a(t-\sin t), a(1-\cos t), 4a\cos\frac{t}{2}\}$ 在哪些点的曲率半径最大？

18　已知曲线 $(C)\in C^3: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 上一点 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 的邻近一点 $\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)$，求 $\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)$ 点到 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 点的密切平面、法平面、从切平面的距离（设 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 点的曲率、挠率分别为 k_0, τ_0）.

19　设曲线 $(C): \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，证明：

(1) $k\tau=-\dot{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}$；

(2) $(\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}})=k^2\tau$.

20　设曲线 $(C): \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，证明：

(1) $(\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \dddot{\boldsymbol{\alpha}})=k^5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\tau}{k}\right)$；

(2) $(\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \ddot{\boldsymbol{\gamma}}, \dddot{\boldsymbol{\gamma}})=\tau^5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{k}{\tau}\right)$.

21　若曲线 $(C): \boldsymbol{r}(t)=\left\{\int f(t)\sin t\,\mathrm{d}t, \int f(t)\cos t\,\mathrm{d}t,\right.$

$\int f(t)\tan t\mathrm{d}t\}$ ，当 $k=\text{const}\neq 0$，试确定 $f(t)$.

22 曲线(C)：$\boldsymbol{r}=\{t,\sin t,\varphi(t)\}$，$(C)$的主法线与 yOz 平面平行时，试确定 $\varphi(t)$.

23 若曲线(C)：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$有固定的不等于零的挠率 τ_0，$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 是主法线、副法线向量，证明：$\boldsymbol{r}^*=\frac{1}{\tau_0}\boldsymbol{\beta}-\int\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}s$ 有固定的曲率 $k^*=|\tau_0|$，并求 $\boldsymbol{r}^*$ 的挠率 τ^*.

24 若曲线(C)上一点的切线和副法线对一个固定方向的夹角为 $\theta(s)$，$\varphi(s)$，证明：

$$\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}=-\frac{k}{\tau}.$$

25 证明：曲线(C)：$\boldsymbol{r}=\left\{a\int\sin\varphi(t)\mathrm{d}t,a\int\cos\varphi(t)\mathrm{d}t,bt\right\}$ 是一般螺线.

26 已知曲线(C)：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$的副法向量 $\boldsymbol{\gamma}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. 求它的单位切向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和单位主法向量 $\boldsymbol{\beta}$，并证明它是一般螺线.

27 设曲线(C)与曲线$(\overline{C})$的点之间有一个一一对应关系，使得在对应点的主法线重合. 证明对应点间的距离处处相等.（这样的一对曲线都称为贝特朗曲线，其中每一条称为另一条的侣线.）

28 求证：贝特朗曲线(C)与$(\overline{C})$之间在对应点处的切向量间的夹角处处相等.

29 证明曲线(C)是贝特朗曲线的充要条件是

$$\lambda k+\mu\tau=1,$$

其中 λ,μ 都是常数.

30 证明具有常曲率 $k\neq 0$ 的曲线(C)是贝特朗曲线，并证明(C)的侣线$(\overline{C})$是(C)的曲率中心的轨迹，且 $\bar{k}=k$，$\bar{\tau}=k^2/\tau$.

31 设曲线(C)：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$是常挠率曲线，证明$(\overline{C})$：$\bar{\boldsymbol{r}}=$

$a\boldsymbol{r}(s)+b\left(-\frac{1}{\tau}\boldsymbol{\beta}(s)+\int\boldsymbol{\gamma}(s)\mathrm{d}s\right)$ 是贝特朗曲线（其中 a,b 是常数，τ 是曲线 (C) 的挠率，$\boldsymbol{\beta}(s)$ 是曲线 (C) 的主法向量，$\boldsymbol{\gamma}(s)$ 是曲线 (C) 的副法向量）.

32　证明：如果曲线 (C)：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为一般螺线，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 (C) 的切向量和主法向量，R 为 (C) 的曲率半径，则曲线 $(\bar{C})$：$\boldsymbol{r}^{*}(s)=R\boldsymbol{\alpha}-\int\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}s$ 也是一般螺线.

33　证明一条曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为一般螺线的充要条件是 $(\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}},\ddddot{\boldsymbol{r}})=0$.

34　证明一条曲线的所有切线不可能同时都是另一条曲线的切线.

35　设在两曲线 (C) 与 (C^{*}) 的点之间建立了一一对应关系，使它们在对应点的切线平行. 证明它们在对应点的主法线以及副法线也分别平行，而且它们的挠率和曲率都成比例，因此曲线 (C) 是一般螺线，(C^{*}) 也是一般螺线.

36　证明：如果曲线 (C) 的所有密切平面都垂直于某个固定直线，那么它是平面曲线.

37　证明：如果两条曲线在对应点有公共的副法线，则它们是平面曲线.

38　证明：曲线 (C)：$\boldsymbol{r}=\{\cosh t,2\sinh t,\mathrm{e}^{t}\}$ 是平面曲线.

39　证明：曲线 (C)：$x=\sqrt{6}at^{3}$，$y=a(1+3t^{2})$，$z=\sqrt{6}at$ 的挠率 $\tau=-\frac{a}{y^{2}}$.

40　设曲线 (C)：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，它的曲率 $k\neq0$，求向量 $\boldsymbol{w}(s)$，使 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{\alpha}$，$\dot{\boldsymbol{\beta}}(s)=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{\beta}$，$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{\gamma}$.

41　设曲线 (C)：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，$\dot{k}\neq0$，$\tau\neq0$，令 $\rho=\frac{1}{k}$，$\sigma=\frac{1}{\tau}$. 假定 $\rho^{2}+(\dot{\rho}\sigma)^{2}=a^{2}(a>0)$，求证曲线 (C) 在以 a 为半径的球面上.

42　设曲线(C):$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,$k\neq0$,$\tau\neq0$,证明$\boldsymbol{r}(s)$在一球面上的充要条件是$\frac{\tau}{k}=\left(\frac{\dot{k}}{\tau k^2}\right)^{\bullet}$$\left(\text{或 } \tau\rho=-\left(\frac{\dot{\rho}}{\tau}\right)^{\bullet}\right)$.

43　设曲线(C):$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,$\dot{k}\neq0$,$\tau\neq0$,令$\rho=\frac{1}{k}$,求证$(C)$在球面上的充要条件是$k>0$,和存在一个可微函数$f(s)$,使得$f\tau=\dot{\rho}$,$\dot{f}+\tau\rho=0$.(1963)

44　依上题条件,证明$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$在球面上的充要条件是存在常数$A$、$B$使得

$$k\left[A\cos\left(\int_0^s\tau\mathrm{d}s\right)+B\sin\left(\int_0^s\tau\mathrm{d}s\right)\right]\equiv1.\ (1972)$$

§4　全章小结

本章讨论的对象是简单曲线段,它是通过直线段到空间的同胚映射定义的.讨论的中心问题是曲线在一点邻近的局部形状和性质.

在曲线上,首先建立了一个在运动下不变的参数——自然参数(即弧长参数).尔后在曲线的每一点处,给定一副正交标架,完成一个依赖于自然参数的基本三棱形:$[\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\beta}(s),\boldsymbol{\gamma}(s)]$.研究$[\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\beta}(s),\boldsymbol{\gamma}(s)]$关于固定点处的$[\boldsymbol{r}(s_0);\boldsymbol{\alpha}(s_0),\boldsymbol{\beta}(s_0),\boldsymbol{\gamma}(s_0)]$的相对的微小变化来描述曲线的状态.标架的变化规律由伏雷内公式反映出来,公式中的系数k、τ则直接描述了曲线在一点邻近的形状,其中k表示曲线的切向量对弧长的旋转速度,它揭示了曲线的弯曲状态,挠率τ则是副法向量对弧长的变化率,它刻画了曲线的扭转状态.这样的两个量完全地刻画了曲线的基本特征.反过来,对于两个确定的可微函数$k=k(s)>0$,$\tau=\tau(s)$,在区间$a\leqslant s\leqslant b$上又完全确定了曲线的几何形状,甚

至在给定了初始条件下，它们也确定了空间曲线的方程，这一点由曲线论的基本定理给出了理论上的肯定.

这一章中习题的主要类型，大致有两个方面：其一是已知曲线方程的前提下，计算相关的量与相关图形的方程. 比如计算某曲线的曲率 k，挠率 τ，切线的方程、法面的方程等等. 另一方面是在已知曲线的某种特征的情况下，证明曲线的某些性质. 比如已知曲线的所有法平面包含固定向量 $\boldsymbol{e}$，证明这条曲线是直线或平面曲线. 证明这类问题有一个基本思路，就是：

1. 先将已知条件表达为方程；

2. 方程两边分别对参数求微商，并将伏雷内公式代入，或在方程两边同时点乘、叉乘有关向量，得到新的关系式；

3. 解释所得结果的几何意义.

习题中有许多这种实例，希望读者从中体会这种思想方法，掌握解题的技巧，提高处理问题的应对能力.

对于特殊的曲线，它们的特征可参考下表：

名　称	参数表示	参数方程求导	基本向量	曲率与挠率
直线	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{r}'$具有固定方向 $\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{\alpha}$ 为常向量	$k=0$
圆	$\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}\|=R$ $\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})=0$			$k=\text{const}\neq0$ $\tau=0$
平面曲线	$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}=0$	$\boldsymbol{r}'$平行于固定平面 $(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')=0$	$\boldsymbol{r}$ 为常向量	$\tau=0$
一般螺线	$\boldsymbol{r}=\{f(s),g(s)^{\bullet},s\cos\omega\}$	$(\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}},\ddddot{\boldsymbol{r}})=0$	$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\rho}=\cos\omega$ $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\rho}=0$ $\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\rho}=\sin\omega$	$\dfrac{k}{\tau}=$常数
球面曲线	$\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{m}\|=\rho$	$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{m})\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0$		$\rho\tau+\left(\dfrac{\dot{\rho}}{\tau}\right)^{\bullet}=0$ $\rho=\dfrac{1}{k}$

续表

名　称	参数表示	参数方程求导	基本向量	曲率与挠率
贝特朗曲线	(C)与(C^*)互为侣线对应点主法线重合			$\lambda k+\mu\tau=1$

第二章　曲　面　论

§1　曲面的概念

1.1　简单曲面及其参数表示

(1) 主要概念：**若尔当(Jordan)曲线、初等区域、简单曲面、曲面的参数表示、曲纹坐标、坐标曲线、曲纹坐标网**.

(2) 主要公式：

曲面的参数方程：曲面 S：

$$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in G.$$

曲面的向量参数表示：曲面 S：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}.(u,v)\in G.$$

其中 u、v 是曲面上点的曲纹坐标.

(3) 实例：

圆柱面的参数表示为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\theta,z)=\{R\cos\theta,R\sin\theta,z\}$ 即 $u=\theta,v=z$，G 是一个长方形区域：$0<\theta<2\pi,-\infty<z<\infty$. 坐标曲线是：$\theta$－曲线($z$＝常数)即

$$\boldsymbol{r}(\theta,z_0)=\{R\cos\theta,R\sin\theta,z_0\},$$

它是垂直于 z 轴的平面和圆柱面的交线，它们都是圆. z－曲线(θ＝常数)即

$$\boldsymbol{r}(\theta_0,z)=\{R\cos\theta_0,R\sin\theta_0,z\},$$

它是圆柱面上的直母线.

球面的参数表示为：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\varphi,\theta)=\{R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\}$，$(\varphi,\theta)\in G$，$G$ 是一个长方形区域：$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$；$0<\varphi<2\pi$. 即 $u=\varphi, v=\theta$. 坐标曲线是 φ - 曲线（θ = 常数），即

$$\boldsymbol{r}(\varphi,\theta_0)=\{R\cos\theta_0\cos\varphi, R\cos\theta_0\sin\varphi, R\sin\theta_0\},$$

是球面上等纬度的圆——纬线. θ - 曲线（φ = 常数）即

$$\boldsymbol{r}(\varphi_0,\theta)=\{R\cos\theta\cos\varphi_0, R\cos\theta\sin\varphi_0, R\sin\theta\},$$

它是球面上过两极的半圆——经线（子午线）.

1.2 光滑曲面

(1) 主要概念：

k 阶正则曲面（C^k 类曲面）、**光滑曲面**（C^r 类曲面）、曲面的**正常点**、曲面上的**正规坐标网**、曲面的**特殊参数表示**、曲面的**切方向**、曲面的**切平面**、曲面的**法方向**、曲面的**法线**、曲面的**正侧**.

(2) 主要定理：

命题 1 曲面在正常点的邻域中总可以有形式为 $z=z(x,y)$ 的特殊参数表示.

命题 2 曲面上正常点处的所有切方向都在过该点的坐标曲线的切向量 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 所决定的切平面上.

曲面 $S: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 在一点 $P(u_0,v_0)$ 处切平面的方程为：

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(u_0,v_0), \boldsymbol{r}_u(u_0,v_0), \boldsymbol{r}_v(u_0,v_0))=0,$$

其中 $\boldsymbol{R}(X,Y,Z)$ 是切平面上一点的向径. 它的坐标形式为：

$$\begin{vmatrix} X-x(u_0,v_0) & Y-y(u_0,v_0) & Z-z(u_0,v_0) \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(x_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}=0.$$

对于曲面 S 的特殊参数表示 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z(x,y)\}$，它在 (x_0,y_0) 点处的切平面方程为：

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-z_0 \\ 1 & 0 & p_0 \\ 0 & 1 & q_0 \end{vmatrix}=0,$$

即
$$Z-z_0=p_0(x-x_0)+q_0(Y-y_0),$$

其中

$$z_0=z(x_0,y_0),p_0=\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)},q_0=\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)}.$$

曲面在一点(u_0,v_0)处的单位法向量为:

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)\times\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)}{|\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)\times\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)|}.$$

法线的方程为:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}(u_0,v_0)+\lambda(\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)\times\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)),$$

其中 $\boldsymbol{R}(X,Y,Z)$是法线上任一点的向径,λ 是决定 $\boldsymbol{R}$ 在法线上的位置的参数.用坐标形式表达的法线方程为:

$$\frac{X-x(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0)\end{vmatrix}}=\frac{Y-y(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} z_u(u_0,v_0) & x_u(u_0,v_0) \\ z_v(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0)\end{vmatrix}}$$
$$=\frac{Z-z(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0)\end{vmatrix}}.$$

对于曲面的特殊参数表示,法线方程可简化为

$$\frac{X-x_0}{p_0}=\frac{Y-y_0}{q_0}=\frac{Z-z_0}{-1}.$$

(3) 例题:

设曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=\{u+v,u-v,uv\}$,在(1,2)点处的单位法向量及切平面的方程.

解 $\boldsymbol{r}(1,2)=\{3,-1,2\}$,

$\boldsymbol{r}_u(1,2)=\{1,1,v\}_{(1,2)}=\{1,1,2\}$,

$\boldsymbol{r}_v(1,2)=\{1,-1,u\}_{(1,2)}=\{1,-1,1\}$,

$$\boldsymbol{n}(1,2)=\left.\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}\right|_{(1,2)}$$

$$=\left.\frac{\{u+v,v-u,-2\}}{\sqrt{4+2u^2+2v^2}}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{\sqrt{14}}\{3,1,-2\}.$$

过点(1,2)的切平面方程是

$$[\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(1,2)]\cdot\boldsymbol{n}(1,2)=0,$$

即

$$3x+y-2z-4=0.$$

1.3 曲面上的曲线族和曲线网

(1) 主要概念:**曲面上的曲线、曲线族、曲线网、坐标曲线网**.

(2) 主要公式:

对于光滑曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$,其上的曲线用方程:$u=u(t)$, $v=v(t)$表示,也可以用

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[u(t),v(t)]=\boldsymbol{r}(t),$$

或

$$v=\varphi(u),$$

或

$$u=\psi(v),$$

或

$$f(u,v)=0$$

表示.

微分方程

$$A(u,v)\mathrm{d}u+B(u,v)\mathrm{d}v=0$$

表示曲面上的一族曲线.特别地:当 $A=0,B\neq0$ 时,方程变为

$$\mathrm{d}v=0,$$

它表示曲面上的 u-曲线族($v=$常数),当 $A\neq0,B=0$ 时,方程变为

$$\mathrm{d}u=0,$$

它表示曲面上的 v-曲线族($u=$常数).

微分方程

$$A(u,v)\mathrm{d}u^2+2B(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+C(u,v)\mathrm{d}v^2=0$$

当$[B(u,v)]^2-A(u,v)\cdot C(u,v)>0$时，表示曲面上的两族曲线——曲线网．特别地：当$A=C=0$时，方程变为

$$\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0,$$

它表示的曲线网就是曲面上的曲纹坐标网．

习题 2.1

1 求正螺面$\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, bv\}$的坐标曲线．

2 证明双曲抛物面$\boldsymbol{r}=\{a(u+v), b(u-v), 2uv\}$的坐标曲线就是它的直母线．

3 求球面$\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta\}$上任意点的切平面和法线的方程．

4 求椭圆柱面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$在任意点的切平面的方程，并证明沿每一条直母线，此曲面只有一个切平面．

5 证明曲面$\boldsymbol{r}=\left\{u, v, \dfrac{a^3}{uv}\right\}$的切平面和三个坐标平面构成的四面体的体积是常数．

6 求曲面$\boldsymbol{r}=\{u+v, u^2+v^2, u^3+v^3\}$在点$(2,2,2)$处的切平面方程．

7 试证曲面$F(x,y,z)=0$在$P(x_0,y_0,z_0)$点的切平面方程为$(x-x_0)F'_x(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)F'_y(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)F'_z(x_0,y_0,z_0)=0$．

8 试在曲面$xyz=1$上求平行于平面$x+y+z-5=0$的切平面方程．

9 试证明曲面$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$的切平面被坐标平面截取的线段的平方和是一常数．

10 试证明曲面$z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$的所有切平面都通过一个定点．

11 试求螺旋线$\boldsymbol{r}=\{a\cos t, a\sin t, bt\}$的切线构成的曲面；

并证明此曲面的法线与 Oz 轴交成定角.

12 试证曲面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, \varphi(v)\}$ 的法线方向余弦为

$$\frac{\varphi'\sin v}{\sqrt{u^2+\varphi'^2}}, \frac{\varphi'\cos v}{\sqrt{u^2+\varphi'^2}}, \frac{u}{\sqrt{u^2+\varphi'^2}}.$$

13 试证曲面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, a\sin 2v\}$ 上任一点处的切平面与此曲面的交线为一椭圆.

§2 曲面的第一基本形式

2.1 曲面的第一基本形式 曲面上曲线的弧长

(1) 主要概念:曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 的**第一基本形式**、**第一类基本量**.

(2) 主要公式:

第一基本形式 $\mathrm{I}=\mathrm{d}s^2=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2$,其中 $E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u, F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v, G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v$.

曲面 S 上一条曲线(C):$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[u(t),v(t)]$,其上两点 $A(t_0)$,$B(t_1)$,则 A、B 间的弧长为

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

对于曲面的特殊参数表示 $z=z(x,y)$,有

$$\boldsymbol{r}=\{x,y,z(x,y)\},$$

$$\boldsymbol{r}_x=\{1,0,p\}, p=\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\boldsymbol{r}_y=\{0,1,q\}, q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

$E=\boldsymbol{r}_x\cdot\boldsymbol{r}_x=1+p^2, F=\boldsymbol{r}_x\cdot\boldsymbol{r}_y=pq, G=\boldsymbol{r}_y\cdot\boldsymbol{r}_y=1+q^2$.

$\mathrm{I}=(1+p^2)\mathrm{d}x^2+2pq\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(1+q^2)\mathrm{d}y^2$.

(3) 例题：

求正螺面 $S: \boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, av\}$ 的第一基本形式.

解 $\boldsymbol{r}_u=\{\cos v, \sin v, 0\}$,

$\boldsymbol{r}_v=\{-u\sin v, u\cos v, a\}$.

$E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u=1, F=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=0, G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v=u^2+a^2$.

$\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2$.

2.2 曲面上两方向的交角

(1) 主要概念：曲面 $S: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上**两个切方向**$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$、$(\delta u:\delta v)$**间的角**.

(2) 主要公式：

设方向(d)与方向(δ)间的角为 θ,则

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}||\delta\boldsymbol{r}|}$$

$$=\frac{E\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\mathrm{d}v\delta v}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}\sqrt{E(\delta u)^2+2F\delta u\delta v+G(\delta v)^2}}.$$

对于坐标曲线 u－曲线与 v－曲线的交角 ω,有

$$\cos\omega=\frac{\boldsymbol{r}_u}{|\boldsymbol{r}_u|}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_v|}=\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

坐标网是正交网的充分必要条件是 $F=0$.

(3) 例题：

证明旋转曲面 $S: \boldsymbol{r}=\{\varphi(t)\cos\theta, \varphi(t)\sin\theta, \psi(t)\}$ 的坐标网是正交网.

证明 由于 $\boldsymbol{r}=\{\varphi(t)\cos\theta, \varphi(t)\sin\theta, \psi(t)\}$,

$\boldsymbol{r}_\theta=\{-\varphi(t)\sin\theta, \varphi(t)\cos\theta, 0\}$,

$\boldsymbol{r}_t=\{\varphi'(t)\cos\theta, \varphi'(t)\sin\theta, \psi'(t)\}$.

由此得

$$F=\boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}(t)=0,$$

即曲纹坐标网是正交网.

2.3 正交曲线族和正交轨线

(1) 主要概念:曲线族的**正交轨线**.

(2) 主要结果:

曲线族 $A\mathrm{d}u+B\mathrm{d}v=0$ 的正交轨线的微分方程是:

$$E+F\left(-\frac{A}{B}+\frac{\delta v}{\delta u}\right)+G\left(-\frac{A}{B}\right)\frac{\delta v}{\delta u}=0,$$

即

$$\frac{\delta v}{\delta u}=-\frac{BE-AF}{BF-AG}.$$

2.4 曲面域的面积

(1) 主要概念:**曲面域的面积**.

(2) 主要公式:

设曲面域 D 的面积为 σ 则

$$\sigma=\iint\limits_{\mathscr{D}}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 $\mathscr{D}$ 是与曲面域 D 相对应的 (u,v) 平面上的区域.

(3) 例题:

设曲面的第一基本形式为 $\mathrm{I}=\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2$,求出曲面上由三条曲线 $u=\pm av$, $v=1$ 相交所成曲面三角形的面积.

解 由 $\mathrm{I}=\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2$ 可知 $E=1, F=0, G=u^2+a^2$.

如图 1 所示,曲面上所给曲线的交点 A, B, C 的坐标可由 $\begin{cases}u=av,\\u=-av,\end{cases}$ $\begin{cases}u=av,\\v=1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}u=-av,\\v=1\end{cases}$ 解得,它们是 $A:(u=0, v=0)$, $B:(u=a, v=1)$, $C:(u=-a, v=1)$.

所求三角形面积 σ

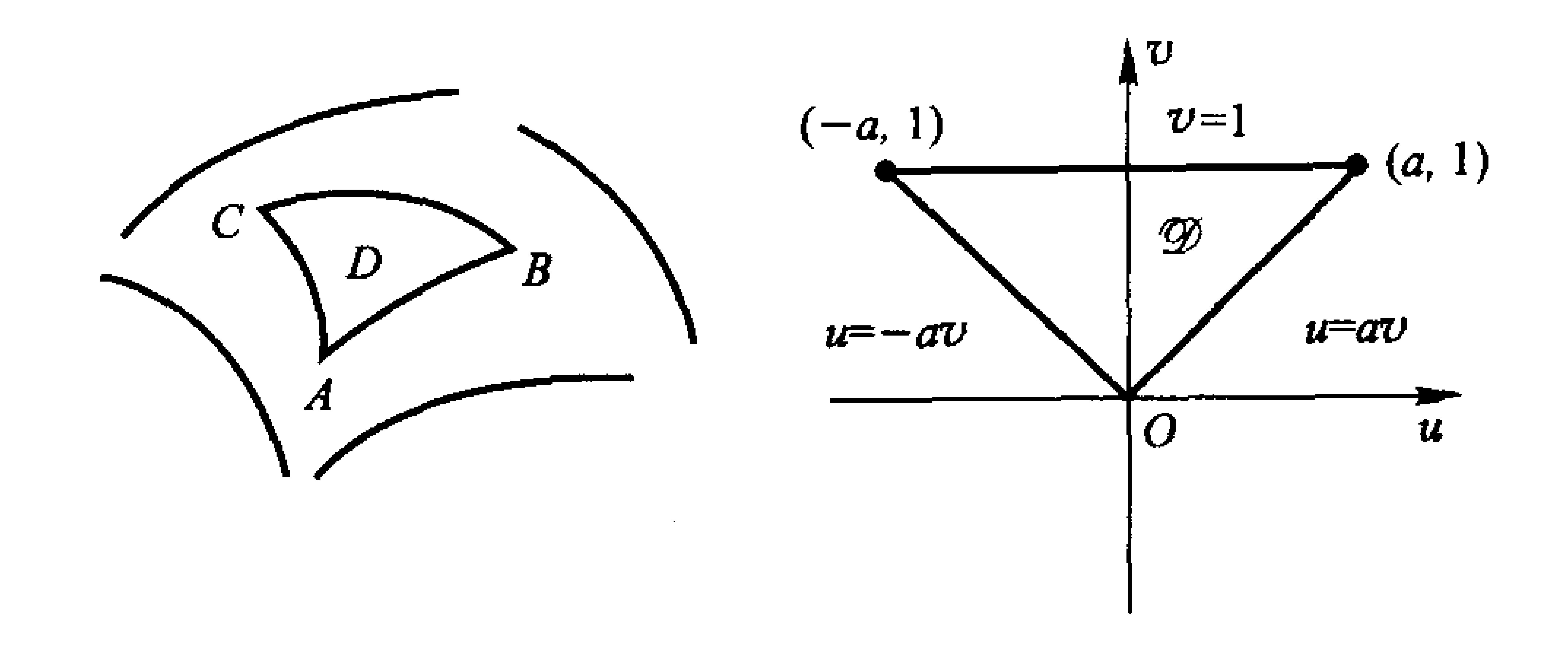


图 1

$$\sigma = \iint_{\mathscr{D}} \sqrt{u^2 + a^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_{-a}^{0} \left[\int_{-\frac{u}{a}}^{1} \sqrt{u^2 + a^2}\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u +$$

$$\int_{0}^{a} \left[\int_{\frac{u}{a}}^{1} \sqrt{u^2 + a^2}\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u$$

$$= \int_{-a}^{0} \left(1 + \frac{u}{a}\right)\sqrt{u^2 + a^2}\mathrm{d}u + \int_{0}^{a} \left(1 - \frac{u}{a}\sqrt{u^2 + a^2}\right)\mathrm{d}u$$

$$= 2\int_{0}^{a} \left(1 - \frac{u}{a}\right)\sqrt{u^2 + a^2}\mathrm{d}u$$

$$= \left\{\left[u\sqrt{u^2 + a^2} + a^2\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right] - \frac{2}{3a}(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}\right\}\Bigg|_{0}^{a}$$

$$= a^2\left[\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \ln(\sqrt{2} + 1)\right].$$

2.5 等距变换

(1) 主要概念:**变换**、**等距变换**(**保长变换**)、曲面的**内蕴性质**(内在性质)、**内蕴量**.

(2) 主要定理:

定理 两个曲面之间的一个变换是等距的充要条件是经过适当的参数选择后,它们具有相同的第一基本形式.

2.6 保角变换

(1) 主要概念:**保角变换(保形变换)**.

(2) 主要定理:

定理 两个曲面之间的一个变换是保角变换的充要条件是它们的第一基本形式成比例.

习题 2.2

1 求双曲抛物面 $\boldsymbol{r}=\{a(u+v),b(u-v),2uv\}$ 的第一基本形式.

2 求正螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,u\sin v,bv\}$ 的第一基本形式,并证明坐标曲线互相垂直.

3 在第一基本形式为

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+\sinh^2u\,\mathrm{d}v^2$$

的曲面上,求方程为 $u=v$ 的曲线的弧长.

4 设一个曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2,$$

求它上面两条曲线 $u+v=0,u-v=0$ 的交角.

5 求曲面 $z=axy$ 上坐标曲线 $x=x_0,y=y_0$ 的交角.

6 求 $u-$曲线和 $v-$曲线的正交轨线的微分方程.

7 在曲面上一点,含 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 的二次方程

$$P\mathrm{d}u^2+2Q\mathrm{d}u\mathrm{d}v+R\mathrm{d}v^2=0$$

确定两个方向$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$和$(\delta u:\delta v)$,证明这两个方向互相垂直的条件是

$$ER-2FQ+GP=0.$$

8 证明曲面的坐标曲线的二等分角轨线的微分方程为

$$E\mathrm{d}u^2=G\mathrm{d}v^2.$$

9 设曲面的第一基本形式为 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2$,求出曲面上由三条曲线 $u=\pm av,v=1$ 相交所成的三角形的面积.

10 求球面 $\boldsymbol{r}=a\{\cos\varphi\cos\theta,\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\}$ 的面积.

11 证明螺旋面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,u\sin v,u+v\}$ 与旋转曲面 $\boldsymbol{r}^*=\{t\cos\theta,t\sin\theta,\sqrt{t^2-1}\}$ 的等距对应为

$$\begin{cases}\theta=\arctan u+v,\\ t=\sqrt{u^2+1}.\end{cases}$$

12 简单曲面经过参数变换 $\theta=\theta(u,v),\varphi=\varphi(u,v)$，变为曲面 $\boldsymbol{r}^*(\theta,\varphi)$. 且 $\dfrac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(u,v)}\neq 0$，证明 $\mathrm{I}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)=\mathrm{I}^*(\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}\varphi)$，并写出第一基本量的变换式.

13 求曲面 $S:\boldsymbol{r}=\{u\cos\theta,u\sin\theta,u\}$ 上曲线 $u=\mathrm{e}^{\left(\cot\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)\theta}$ 的弧长($\beta=\mathrm{const},0\leqslant\theta\leqslant\pi$)，并证明此曲线与曲面的 u - 曲线构成定角 β.

14 求曲面 $S:\boldsymbol{r}=\{u\cos v,u\sin v,av\}$ 上，由微分方程 $\mathrm{d}u=\sqrt{u^2+a^2}\mathrm{d}v$ 定义的曲线的正交轨线.

15 在球面上求与子午线成定角的曲线方程.

16 求曲面 $S:\boldsymbol{r}=\{(b+a\sin\varphi)\cos\theta,(b+a\sin\varphi)\sin\theta,a\cos\varphi\}$ 的表面积.

17 设曲面 $S:\boldsymbol{r}=\{w\cos v-w_v\sin v,w\sin v+w_v\cos v,u\}$，其中 $w_v=\dfrac{\partial w}{\partial v}$，柱面 $S^*:\boldsymbol{r}^*=\{a\cos v,a\sin v,u\}$ 等角等价，求证：$w=f(u)$ 或 $w=g(v)$，并证明 S 是一旋转曲面.

§3 曲面的第二基本形式

3.1 曲面的第二基本形式

(1) 主要概念：曲面的第二基本形式、第二基本量.

(2) 主要公式:

$$\mathrm{II} = \boldsymbol{n}\cdot \mathrm{d}^2\boldsymbol{r} = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2.$$

$$L = \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_u = \frac{(\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

$$M = \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_v = -\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_u = \frac{(\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

$$N = \boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_v = \frac{(\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

对于曲面 $\boldsymbol{r} = \{x, y, z(x,y)\}$,

$$L = \boldsymbol{r}_{xx}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$M = \boldsymbol{r}_{xy}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$N = \boldsymbol{r}_{yy}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

其中 $p=\frac{\partial z}{\partial x}, q=\frac{\partial z}{\partial y}, r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(3) 例题:

计算抛物面 $z=a(x^2+y^2)$的第一、第二基本形式.

解 先计算

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=2ax, q=\frac{\partial z}{\partial y}=2ay,$$

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a, s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2a.$$

再计算

$$E=1+p^2=1+4a^2x^2, F=pq=4a^2xy,$$

$$G=1+q^2=1+4a^2y^2.$$

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{2a}{\sqrt{1+4a^2x^2+4a^2y^2}},$$

$$M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0,$$

$$N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{2a}{\sqrt{1+4a^2x^2+4a^2y^2}}.$$

$$\mathrm{I}=(1+4a^2x^2)\mathrm{d}x^2+8a^2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(1+4a^2y^2)\mathrm{d}y^2,$$

$$\mathrm{II}=\frac{2a}{\sqrt{1+4a^2x^2+4a^2y^2}}\mathrm{d}x^2+\frac{2a}{\sqrt{1+4ax^2+4ay^2}}\mathrm{d}y^2.$$

3.2　曲面上曲线的曲率

(1) 主要概念：曲面 S 上一点处沿切方向 (d) 的**法截面**、**法截线**、**法曲率 k_n**、**法曲率半径**.

(2) 主要公式与定理：

设曲面上的曲线 (C) 在 P 点处的曲率为 k，沿曲线切方向的曲面法曲率为 k_n，曲线的主法向量与曲面法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 θ，则

$$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}=k\cos\theta.$$

梅尼埃(Meusnier)**定理**：

曲面曲线 (C) 在给定点 P 处的曲率中心 C 就是与曲线 (C) 具有相同切线的法截线 (C_0) 上同一点 P 的曲率中心 C_0 在曲线 (C) 的密切平面上的投影.

3.3　杜邦指标线

(1) 主要概念：曲面在 P 点的**杜邦**(Dupin)**指标线**. 曲面上的**椭圆点**、**双曲点**、**抛物点**、**平点**.

(2) 主要公式：

曲面在一点处的杜邦指标线的方程为

$$Lx^2+2Mxy+Ny^2=\pm 1.$$

3.4　曲面的渐近方向和共轭方向

(1) 主要概念：曲面在一点 P 处的**渐近**方向，曲面上的**渐近曲**

线，曲面上的**渐近曲线网**、曲面的**共轭方向**、**共轭网**.

(2) 主要公式与定理：

曲面上一点处的方向(d)是渐近方向应满足方程

$$L_0 \mathrm{d}u^2 + 2M_0 \mathrm{d}u\mathrm{d}v + N_0 \mathrm{d}v^2 = 0.$$

曲面上渐近曲线的方程为：

$$L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2 = 0.$$

曲面上两个方向(d)与(δ)共轭的充要条件是

$$L_0 \mathrm{d}u\delta u + M_0(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta v) + N_0 \mathrm{d}v\delta v = 0.$$

共轭网的微分方程为

$$L\mathrm{d}u\delta u + M(\mathrm{d}u\delta v + \mathrm{d}v\delta u) + N\mathrm{d}v\delta v = 0.$$

与曲线族　$A\mathrm{d}u + B\mathrm{d}v = 0$ 共轭的曲线族的方程为

$$\begin{vmatrix} L\delta u + M\delta v & M\delta u + N\delta v \\ A & B \end{vmatrix} = 0.$$

命题 1　如果曲面上有直线，则它一定是曲面的渐近曲线.

命题 2　曲面在渐近曲线上一点处的切平面一定是渐近曲线的密切平面.

命题 3　曲面的曲纹坐标网是渐近网的充分必要条件是

$$L = N = 0.$$

命题 4　曲纹坐标网是共轭网的充分必要条件是

$$M = 0.$$

(3) **例题**：

求曲面 $z = xy^2$ 的渐近曲线.

解　$z = xy^2$，则

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = y^2, q = \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy.$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x.$$

所以　$L = 0, M = \dfrac{2y}{\sqrt{1 + y^4 + 4x^2y^2}}, N = \dfrac{2x}{\sqrt{1 + y^4 + 4x^2y^2}}.$

渐近线的方程为

$$\frac{4y}{\sqrt{1+y^2+4x^2y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{2x}{\sqrt{1+y^4+4x^2y^2}}\mathrm{d}y^2=0.$$

化简得

$$\mathrm{d}y(2y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0,$$
$$\mathrm{d}y=0,2y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0.$$

渐近线为

$$y=C_1 \text{ 及 } x^2y=C_2.$$

3.5 曲面的主方向和曲率线

(1) 主要概念：曲面上一点处的**主方向**、**脐点**、**圆点**、**曲率线**、**曲率线网**.

(2) 主要公式与定理：

曲面上一点处的主方向(d)满足关系式

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}v^2 & -\mathrm{d}u\mathrm{d}v & \mathrm{d}u^2 \\ E_0 & F_0 & G_0 \\ L_0 & M_0 & N_0 \end{vmatrix}=0,$$

即

$$(E_0M_0-F_0L_0)\mathrm{d}u^2+(E_0N_0-G_0L_0)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+(F_0N_0-G_0M_0)\mathrm{d}v^2=0.$$

曲面上曲率线的微分方程为

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}v^2 & -\mathrm{d}u\mathrm{d}v & \mathrm{d}u^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0.$$

主方向判定定理(罗德里格(Rodrigues)定理).

如果方向$(d)=\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$是主方向，则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\lambda\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中$\lambda=-k_n$，k_n是曲面沿方向(d)的法曲率.

反之,如果对于方向(d)有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\lambda\,\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

则(d)是主方向,且 $\lambda=-k_n$, k_n 是沿方向(d)的法曲率.

命题 曲面上的曲纹坐标网是曲率线网的充分必要条件是

$$F=M=0.$$

(3) 例题:

求双曲面 $z=axy$ 上的曲率线.

解 $z=axy$.

$p=ay, q=ax$.

$r=0, s=a, t=0$.

$E=1+p^2=1+a^2y^2, F=pq=a^2xy, G=1+a^2x^2$.

$$L=0, M=\frac{a}{\sqrt{1+a^2y^2+a^2x^2}}, N=0.$$

曲率线的微分方程为

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}y^2 & -\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \mathrm{d}x^2 \\ 1+a^2y^2 & a^2xy & 1+a^2x^2 \\ 0 & \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2y^2+a^2x^2}} & 0 \end{vmatrix}=0,$$

即
$$\frac{a(1+a^2y^2)}{\sqrt{1+a^2x^2+a^2y^2}}\mathrm{d}x^2-\frac{a(1+a^2x^2)}{\sqrt{1+a^2x^2+a^2y^2}}\mathrm{d}y^2=0.$$

化简得
$$\frac{\mathrm{d}x^2}{1+a^2x^2}=\frac{\mathrm{d}y^2}{1+a^2y^2}.$$

积分
$$\int\frac{1}{\sqrt{1+a^2x^2}}\mathrm{d}x=\pm\int\frac{1}{\sqrt{1+a^2y^2}}\mathrm{d}y.$$

即 $\dfrac{1}{a}\ln\left|ax+\sqrt{1+a^2x^2}\right|=\pm\dfrac{1}{a}\ln\left|ay+\sqrt{1+a^2y^2}\right|+C_1$,

故所求曲率线为

$$\ln\left|ax+\sqrt{1+a^2x^2}\right|\pm\ln\left|ay+\sqrt{1+a^2y^2}\right|=C.$$

3.6 曲面的主曲率、高斯曲率和平均曲率

(1) 主要概念:**主曲率**、**高斯曲率**、**平均曲率**、**极小曲面**.

(2) 主要公式和定理:

主曲率 k_N 可由下式计算:

$$\begin{vmatrix} L-k_NE & M-k_NF \\ M-k_NF & N-k_NG \end{vmatrix}=0.$$

即 $(EG-F^2)k_N^2-(LG-2MF+NE)k_N+(LN-M^2)=0.$

高斯曲率 K 的计算公式:

$$K=k_1\cdot k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

平均曲率 H 的计算公式:

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}.$$

对于曲面的特殊参数表示 $z=z(x,y)$,有

$$K=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

$$H=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

欧拉(Euler)公式.

曲面一点处沿方向(d)的法曲率 k_n 与该点处的两个主曲率有如下关系:

$$k_n(d)=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta,$$

其中 θ 是方向(d)与第一主方向的夹角.

定理 曲面上一点(非脐点)的主曲率是曲面在这点所有方向的法曲率的最大值和最小值.

(3) 例题:

求正螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, bv\}$ 的主曲率和平均曲率、高斯曲率.

解 因为 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, bv\}$.

$$E=1, F=0, G=u^2+b^2.$$

$$L=0, M=\frac{-b}{\sqrt{u^2+b^2}}, N=0.$$

代入主曲率的公式得:

$$\begin{vmatrix} -k_N & \dfrac{-b}{\sqrt{u^2+b^2}} \\ -\dfrac{b}{\sqrt{u^2+b^2}} & -k_N(u^2+b^2) \end{vmatrix}=0,$$

所以

$$k_1=\frac{b}{u^2+b^2}, k_2=\frac{-b}{u^2+a^2}.$$

于是有

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=0.$$

$$K=k_1\cdot k_2=-\frac{b^2}{(u^2+b^2)^2}.$$

3.7 曲面在一点邻近的结构

主要结论:

1 在曲面的椭圆点处,其邻近的形状近似于椭圆抛物面.

2 在曲面的双曲点处,其邻近的形状近似于双曲抛物面.

3 在曲面的抛物点处,主方向上的法截线分别近似于抛物线和立方抛物线.

3.8 高斯曲率的几何意义

(1) 主要概念:

曲面的**球面表示**(亦称为**高斯映射**)、曲面的**第三基本形式**、**第三基本量**.

(2) 主要公式和定理:

$$\mathrm{III}=e\mathrm{d}u^2+2f\mathrm{d}u\mathrm{d}v+g\mathrm{d}v^2.$$

$$E=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_u,\quad F=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_v,\quad G=\boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{n}_v.$$

高斯曲率、平均曲率及曲面的三个基本形式满足下述线性关系：

$$\text{III}-2H\,\text{II}+K\,\text{I}=0.$$

定理　曲面上 P 点邻近的区域 σ 在单位球面上的表示是 σ^*，当 σ 趋于曲面上已知点 P 时，σ^* 的面积与 σ 的面积之比，趋于曲面在 P 点的高斯曲率的绝对值. 即

$$|K_P|=\lim_{\sigma\to P}\frac{\sigma^*\text{ 的面积}}{\sigma\text{ 的面积}}.$$

习题　2.3

1　计算悬链面 $\boldsymbol{r}=\{\cosh u\cos v,\cosh u\sin v,v\}$ 的第一、第二类基本量.

2　计算抛物面 $2x_3=5x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2$ 在原点的第一、第二基本形式.

3　证明对于正螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,u\sin v,bv\}$，$-\infty<u<\infty$，$-\infty<v<+\infty$，处处有 $EN-2FM+GL=0$.

4　求出抛物面 $z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$ 在 $(0,0)$ 点、方向 $(\mathrm{d}x:\mathrm{d}y)$ 的法曲率.

5　已知平面 π 到单位球面 S 的中心距离为 $d(0<d<1)$，求 π 与 S 交线的曲率与法曲率.

6　利用法曲率公式 $k_n=\frac{\text{II}}{\text{I}}$，证明在球面上对于任何曲纹坐标第一、二类基本量成比例.

7　求证在正螺面上有一族渐近线是直线，另一族是螺旋线.

8　求曲面 $z=xy^2$ 的渐近线.

9　证明每一条曲线在它的主法线曲面上是渐近曲线.

10　证明在曲面 $z=f(x)+g(y)$ 上曲线族 $x=$ 常数，$y=$ 常

数构成共轭网.

11　确定螺旋面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, cv\}$ 上的曲率线.

12　找出双曲面 $z=axy$ 上的曲率线.

13　求曲面 $\boldsymbol{r}=\left\{\frac{a}{2}(u-v), \frac{b}{2}(u+v), \frac{uv}{2}\right\}$ 上的曲率线的方程.

14　给出曲面上一条曲线 Γ,设 Γ 上每一点处的副法向量和曲面在该点处的法向量成定角.求证 Γ 是一平面曲线.

15　如果一曲面的曲率线的密切平面与切平面交成定角,则它是平面曲线.

16　求正螺面的主曲率.

17　确定抛物面 $z=a(x^2+y^2)$ 在 $(0,0)$ 点的主曲率.

18　证明在曲面上给定点处,沿相互成为直角的方向的法曲率之和为常数.

19　证明若曲面的两族渐近曲线交于定角,则主曲率之比为一常数.

20　求证正螺面的平均曲率为零.

21　找出双曲面 $z=axy$ 在 $x=y=0$ 的平均曲率和高斯曲率.

22　证明极小曲面上的点都是双曲点或平点.

23　求证如果曲面的平均曲率为零,则渐近线构成正交网.

24　在 xOz 平面上取圆周 $y=0,(x-b)^2+z^2=a^2\ (b>a)$,并令其绕 z 轴旋转得圆环面,圆环面的参数方程是

$$\boldsymbol{r}=\{(b+a\cos\varphi)\cos\theta, (b+a\cos\varphi)\sin\theta, a\sin\varphi\},$$

$0\leqslant\varphi<2\pi, 0\leqslant\theta<2\pi$,求圆环面上的椭圆点,双曲点和抛物点.

25　若曲面的第一基本形式为 $\mathrm{I}=\lambda^2(u,v)(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$ 的形式,则称这曲面的坐标曲线网为等温网,试证:旋转曲面 $\boldsymbol{r}=\{g(t)\cos\theta, g(t)\sin\theta, f(t)\}$ 上存在等温网.

26　若两个曲面 S_1, S_2 交于一条曲线 (C),而且 (C) 是 S_1 的

一条曲率线，则(C)也是S_2的曲率线的充要条件是S_1与S_2沿曲线(C)相交成固定角.

27 证明在曲面S上一个双曲点P处，若两条渐近线都不是直线，则它们之中一条在P点的挠率是$\sqrt{-K}$，另一条在P点的挠率是$-\sqrt{-K}$，其中K是S在P点的高斯曲率.

28 证明如果曲面上无抛物点，则它上面的点和球面象上的点是一一对应的.

29 求证曲面为球面或平面的充分必要条件是$H^2=K$.

30 证明曲面$\boldsymbol{r}=\{u\cos\theta, u\sin\theta, \ln u\}$与曲面$\boldsymbol{r}^*=\{u^*\cos\theta^*, u^*\sin\theta^*, u^*\}$在对应点$u=u^*, \theta=\theta^*$有相等的高斯曲率，但两曲面不等距等价.

31 求曲面$xyz=1$的脐点.

32 求证曲线的切线曲面上的点都是抛物点.

33 求曲面$\boldsymbol{r}=\{u, v, u^2+v^3\}$上的椭圆点，抛物点和双曲点.

34 求曲面$\boldsymbol{r}=\{v^3, u^2, u+v\}$上抛物点的轨迹.

35 求曲面$\boldsymbol{r}=\{u, v, u^2-v^2\}$在$(0,0)$点的邻域内法曲率$k_n$的变化规律.

36 求曲面$\boldsymbol{r}=\{u, v, u^2+v^2\}$在曲线$u=t^2, v=t$在$t=1$的法曲率.

37 求曲面$\boldsymbol{r}=\{u, v, u^2+v^2\}$在$u=1, v=1$点的主方向.

38 求证在两个曲面的交线(C)上点P的曲率k满足方程$k^2\sin^2\theta=k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos\theta$（其中$k_1, k_2$分别是两个曲面在点$P$的法曲率，$\theta$是这两曲面在对应点$P$的法向量夹角）.

39 若简单曲面$\boldsymbol{r}(u,v)$上的所有方向都是渐近方向，则曲面$\boldsymbol{r}(u,v)$是平面，试证之.

40 证明在曲面上任一点，每对共轭方向的法曲率半径之和为$\dfrac{2H}{K}$.

§4 直纹面和可展曲面

4.1 直纹面

(1) 主要概念：**直纹面**、**直母线**、**导线**、**腰曲线**.

(2) 主要公式：

设直纹面上一条曲线(C)的方程为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u)$，则直纹面的参数方程可写成：

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u),$$

其中 $\boldsymbol{b}(u)$是直母线上的单位向量.腰曲线的方程为

$$\boldsymbol{r}(u)=\boldsymbol{a}(u)-\frac{\boldsymbol{a}'(u)\cdot\boldsymbol{b}'(u)}{\boldsymbol{b}'(u)^2}\boldsymbol{b}(u).$$

当 $\boldsymbol{a}'\perp\boldsymbol{b}'$时，腰曲线就是导线.

4.2 可展曲面

(1) 主要概念：**可展曲面**、**曲面族的包络**.

(2) 主要公式与命题：

设有单参数曲面族：

$$\{S_\alpha\}:F(x,y,z,\alpha)=0,\text{其中 }\alpha\text{ 是参数}.$$

它的包络 S 满足方程组：

$$\begin{cases}F(x,y,z,\alpha)=0,\\F_\alpha(x,y,z,\alpha)=0,\end{cases}$$

从方程组中消去 α，得具有下列形式的方程：

$$\varphi(x,y,z)=0.$$

这方程所表示的曲面 S^* 称为判别曲面.如果曲面族中的曲面上都是正常点，包络 S 上的点也是正常点，则判别曲面就是包络面.

命题 1 每一个可展曲面或是柱面、或是锥面，或是一条曲线

的切线曲面.

命题 2 一个曲面为可展曲面的充要条件是此曲面为单参数平面族的包络.

命题 3 一个曲面为可展曲面的充要条件是它的高斯曲率恒等于零.

命题 4 曲面上的曲线是曲率线的充分必要条件是沿此曲线的曲面法线构成可展曲面.

命题 5 可展曲面可以与平面成等距对应.

(3) 例题:

证明螺旋线的切线曲面是可展曲面.

证:螺旋线(C):$\boldsymbol{r}=\{a\cos u, a\sin u, bu\}$,

$$\boldsymbol{r}'=\{-a\sin u, a\cos u, b\}.$$

切线曲面的方程为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\left\{a\cos u-\frac{av}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin u, a\sin u+\frac{av}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos u, bu+\frac{bv}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}.$$

下面证明其为可展曲面:

方法 1 设 $\boldsymbol{a}(u)=\{a\cos u, a\sin u, bu\}$,

$$\boldsymbol{b}(u)=\{-a\sin u, a\cos u, b\},$$

$$\boldsymbol{a}'=\{-a\sin u, a\cos u, b\},$$

$$\boldsymbol{b}'=\{-a\cos u, -a\sin u, 0\},$$

$(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$,根据可展曲面定义,可知它为可展曲面.

方法 2 由于$(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$,所以曲面的高斯曲率

$$K=\frac{-(\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}')^2}{(EG-F^2)^2}=0.$$

根据命题 3 可知它是可展曲面.

方法 3 直接用命题 1,因为曲面是曲线的切线曲面,故为可展曲面.

习题 2.4

1 证明曲面 $\boldsymbol{r}=\left\{u^2+\frac{1}{3}v, 2u^3+uv, u^4+\frac{2}{3}u^2v\right\}$ 是可展曲面.

2 证明曲面 $\boldsymbol{r}=\{\cos v-(u+v)\sin v, \sin v+(u+v)\cos v, u+2v\}$ 是可展曲面.

3 证明正螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, av+b\}$ 不是可展曲面.

4 证明挠曲线的主法线曲面,副法线曲面都不是可展曲面.

5 求平面族 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-z\sin\alpha=1$ 的包络.

6 求平面族 $a^2x+2ay+2z=2a$ 的包络.

7 证明柱面、锥面、任意空间曲线的切线曲面是可展曲面.

8 证明 $\boldsymbol{r}_{vu}=\boldsymbol{r}_{uv}=0$ 的曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 是柱面.

9 求挠曲线的主法线曲面的腰曲线.

10 证明可展曲面上的每一条直母线既是渐近线,又是曲率线.

§5 曲面论的基本定理

5.1 曲面的基本方程和克里斯托费尔符号

(1) 主要概念与公式:

设 C^3 类曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$,

$$\boldsymbol{r}_1=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}, \boldsymbol{r}_2=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}, \boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2}{\sqrt{g}}.$$

并且引入新记号

$$E=g_{11}, F=g_{12}=g_{21}, G=g_{22}, EG-F^2=g,$$

$$L=L_{11}, M=L_{12}=L_{21}, N=L_{22}.$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{r}_k + \lambda_{ij}\boldsymbol{n}, \quad ij=1,2, \\ \boldsymbol{n}_i = \sum_j \mu_i^j \boldsymbol{r}_j. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Gamma_{ij}^k = \sum_l g^{kl}[ij,l] = \sum_l g^{kl}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)$,

$\lambda_{ij} = \boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{n} = L_{ij}, \mu_i^j = -\sum_k g^{jk}L_{ik}$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{r}_k + L_{ij}\boldsymbol{n}, \quad ij=1,2, \\ \boldsymbol{n}_i = -\sum_{jk} L_{ik}g^{kj}\boldsymbol{r}_j. \end{cases} \tag{2}$$

(2)式中的第一式称为高斯方程,第二式称为魏因加尔吞(Weingarten)方程.

上面记号中的(g^{ij})表示(g_{ij})的逆矩阵,即若$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$, $\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = EG - F^2$,则

$$(g^{ij}) = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

即
$$\sum_k g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & 当\ i=j; \\ 0, & 当\ i\neq j, \end{cases} ij=1,2.$$

5.2 曲面的黎曼曲率张量和高斯-科达齐-迈因纳尔迪公式

主要概念及公式:

设Γ_{ij}^k是曲面的克里斯托费尔符号,定义曲面的二种曲率张量:

(1) 黎曼(Riemann)曲率张量 R_{ijk}^l:

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \sum_p (\Gamma_{ij}^p\Gamma_{pk}^l - \Gamma_{ik}^p\Gamma_{pj}^l),$$
$$i\ j\ k\ l\ p = 1,2.$$

(2) 黎曼曲率张量 R_{mijk}：

$$R_{mijk}=\sum_{l}g_{ml}R^{l}_{ijk},\quad m,i,j,k=1,2.$$

黎曼曲率张量 R_{mijk} 的 16 个分量中只有一个是独立的，即 R_{1212}. 其余除了 $R_{mmjk}=0, R_{mijj}=0$ 外，由关系式

$$R_{mijk}=-R_{imjk},$$

$$R_{mijk}=-R_{mikj},$$

$$R_{mijk}=R_{jkmi},$$

$$R_{mijk}+R_{mjki}+R_{mkij}=0$$

约束着张量的取值.

命题 (1) 高斯(Gauss)公式：

$$R_{mijk}=L_{ij}L_{mk}-L_{ik}L_{mj};$$

(2) 科达齐－迈因纳尔迪(Coddzzi－Mainardi)公式：

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^{k}}-\frac{\partial L_{ik}}{\partial u^{j}}=\sum_{l}(\Gamma^{l}_{ik}L_{lj}-L^{l}_{ij}L_{lk}).$$

定理 曲面的高斯曲率是内蕴量：

$$K=\frac{-R_{1212}}{g}.$$

5.3 曲面论的基本定理

基本定理 设

$$\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^{2}+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v^{2}+G\mathrm{d}v^{2}=\sum_{ij=1}^{2}g_{ij}\mathrm{d}u^{i}\mathrm{d}u^{j},$$

$$\mathrm{II}=L\mathrm{d}u^{2}+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v^{2}+N\mathrm{d}v^{2}=\sum_{ij=1}^{2}L_{ij}\mathrm{d}u^{i}\mathrm{d}u^{j}$$

是两个给定的二次形式，其中 I 是正定的. 若 I 和 II 的系数 g_{ij} 和 L_{ij} 对称且满足高斯－科达齐－迈因纳尔迪公式，则除了空间中的位置差别外，惟一地存在一个曲面，以 I 和 II 分别为此曲面的第一和第二基本形式.

习题 2.5

1　平面上取极坐标系时，第一基本形式为 $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$. 试计算第二类克氏符号 Γ_{ij}^k.

2　证明高斯曲率 $K = \det(\mu_i^j)$.

3　证明平均曲率 $H = -\dfrac{1}{2}(\mu_1^1 + \mu_2^2)$.

4　求证

$$R_{mijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{mj}}{\partial u^i \partial u^k} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^m \partial u^j} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m \partial u^k}\right) + \sum_p (\Gamma_{ik}^p [mj,p] - \Gamma_{ij}^p [mk,p]).$$

5　对于 R^3 中的空间曲面来说

$$R_{ijk}^l = -K(\delta_j^l g_{ik} - \delta_k^l g_{ij}),$$

其中 K 是曲面的高斯曲率.

6　证明公式：

(1) $K = \dfrac{1}{E}[(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2]$;

(2) $K = \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{E}\Gamma_{11}^2\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{E}\Gamma_{12}^2\right)\right]$;

(3) $K = \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{G}\Gamma_{22}^1\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{G}\Gamma_{12}^1\right)\right]$;

(4) 对于曲面上的等温坐标网 $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$，求证：

$$K = -\frac{1}{\lambda^2}[(\ln\lambda)_{uu} + (\ln\lambda)_{vv}];$$

(5) 对于曲面上的半测地坐标网 $ds^2 = du^2 + G dv^2$，求证：

$$K = \frac{-1}{G}\ \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

7　如果曲面的第一基本形式 $ds^2=\dfrac{du^2+dv^2}{(u^2+v^2+C)^2}$，计算第二类克里斯托费尔符号.

8　求证第一基本形式是 $ds^2=\dfrac{du^2+dv^2}{(u^2+v^2+C)^2}$ 的曲面有常高斯曲率.

9　求以 $E=1,F=0,G=1,L=-1,M=0,N=0$ 为第一、第二基本量的曲面.

10　证明不存在使 $G=E=1,F=0,L=1,M=0,N=-1$ 的曲面.

§6　曲面上的测地线

6.1　曲面上曲线的测地曲率

(1) 主要概念：曲面曲线(C)在其上一点 P 处的**测地曲率** k_g.

(2) 主要命题和公式：

$$k^2=k_n^2+k_g^2,k_g=\pm k\sin\theta,(\theta=\widehat{\boldsymbol{\beta n}}).$$

命题　曲面 S 上的曲线(C)，它在 P 点的测地曲率的绝对值等于(C)在 P 点的切平面 π 上的正投影曲线(C^*)的曲率.

测地曲率的一般计算公式：设曲面曲线(C)：$u^1=u^1(s),u^2=u^2(s)$，其中 s 是曲线的自然参数. 则有：

$$k_g=\sqrt{g}\left[\frac{du^1}{ds}\left(\frac{d^2u^2}{ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^2\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)-\right.$$
$$\left.\frac{du^2}{ds}\left(\frac{d^2u^1}{ds^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^1\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\right].$$

当曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上的坐标网为正交网时，$F=0$. 公式化简为

$$k_g=\sqrt{g}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}s^2}-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}s^2}-\frac{E_v}{2G}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2+\right.$$

$$\frac{G_u}{G}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}+\frac{G_v}{2G}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2-\frac{E_u}{2E}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}-$$

$$\left.\frac{E_v}{E}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2+\frac{G_u}{2E}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2\right].$$

若再令曲线的切方向与 $\boldsymbol{r}_u$ 的夹角为 θ，k_g 又可有下列计算公式：

$$k_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}\cos\theta+\frac{G_u}{2G\sqrt{E}}\sin\theta$$

$$=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\cos\theta.$$

这个公式称为刘维尔(Liouville)公式.

6.2 曲面上的测地线

(1) 主要概念：曲面上的**测地线**.

(2) 主要命题及公式：

命题 1 曲面上非直线的曲线是测地线的充要条件是除了曲率为零的点外，曲线的主法线重合于曲面的法线.

命题 2 过曲面上任意一点，给定一个曲面的切方向，则存在惟一一条测地线切于此方向.

测地线的方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 u^k}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}=0,\quad k=1,2.$$

曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上的坐标网为正交网时，曲面上测地线的方程为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\dfrac{1}{2\sqrt{G}}\dfrac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta-\dfrac{1}{2\sqrt{E}}\dfrac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\dfrac{1}{\sqrt{E}}\cos\theta,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=\dfrac{1}{\sqrt{G}}\sin\theta.\end{cases}$$

6.3 曲面上的半测地坐标网

(1) 主要概念:曲面上的**半测地坐标网**.

(2) 主要定理:

定理 给出曲面上一条曲线,则总存在一个半测地坐标网,它的非测地坐标曲线族中包含给定的一条曲线.

在半测地坐标网下,曲面的第一基本形式可以简化为

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + G(u,v)\mathrm{d}v^2.$$

6.4 曲面上测地线的短程性

定理 若给出曲面上充分小的邻域内两点 P 和 Q,则过 P,Q 两点的小邻域内的测地线是连接 P、Q 两点上的曲面曲线中弧长最短的曲线.

6.5 高斯 - 波涅公式

在曲面上给出一个由 k 条光滑曲线段所围成的曲线多边形,它围成一个单连通区域 G,多边形是区域 G 的边缘,记为∂G,设曲面的高斯曲率和测地曲率分别为 K 和 k_g,曲面的面积元素和弧长元素分别为 $\mathrm{d}\sigma$,$\mathrm{d}s$,则有以下高斯 - 波涅(Gauss-Bonnet)公式:

$$\iint_G K\mathrm{d}\sigma + \oint_{\partial G} k_g \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{k} (\pi - \alpha_i) = 2\pi,$$

其中 α_i 是曲线多边形的第 i 个外角.

推论 1 如果∂G 是一条光滑曲线,则有

$$\iint_G K\mathrm{d}\sigma + \oint_{\partial G} k_g \mathrm{d}s = 2\pi.$$

推论 2 如果∂G 是由测地线组成,则有

$$\iint_G K\mathrm{d}\sigma + \sum_{i=1}^{k} (\pi - \alpha_i) = 2\pi.$$

推论 3 如果∂G是一个测地三角形,则有

$$\iint_G K\mathrm{d}\sigma = S(\Delta) - \pi,$$

其中 $S(\Delta)$是三内角之和.

6.6 曲面上向量的平行移动

(1) 主要概念:向量的**绝对微分**、向量沿曲线的**平行移动**(列维-奇维塔(Levi-Civita)平行移动).

(2) 主要公式:

设有曲面 S 上的曲线(C),在曲线上每一点 t 处,向量 $\boldsymbol{a}(t)$ 的坐标是 $a^1(t), a^2(t)$即

$$\boldsymbol{a}(t) = a^1(t)\boldsymbol{r}_1 + a^2(t)\boldsymbol{r}_2,$$

则向量 $\boldsymbol{a}(t)$的绝对微分 $\mathrm{D}\boldsymbol{a}$:

$$\mathrm{D}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_1\mathrm{D}a^1 + \boldsymbol{r}_2\mathrm{D}a^2.$$

$$\begin{cases}\mathrm{D}a^1 = \mathrm{d}a^1 + \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{1}a^\alpha\mathrm{d}u^\beta, \\ \mathrm{D}a^2 = \mathrm{d}a^2 + \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{2}a^\alpha\mathrm{d}u^\beta.\end{cases}$$

若向量 $\boldsymbol{a}$ 沿曲线(C)作平行移动,则有

$$\begin{cases}\mathrm{d}a^1 = -\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{1}a^\alpha\mathrm{d}u^\beta, \\ \mathrm{d}a^2 = -\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{2}a^\alpha\mathrm{d}u^\beta.\end{cases}$$

若在曲面一点 M 处给出许多切于曲面的向量,它们沿同一条曲面曲线平行移动,则这些向量的长度和夹角不变.

曲面 S 上的曲线(C)是测地线的充要条件是它的切向量在列维-奇维塔平行移动的意义下沿(C)是互相平行的.

习题 2.6

1 求正交网的坐标曲线的测地曲率.

2　证明球面 $\boldsymbol{r}=\{a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u\}$ 上曲线的测地曲率

$$k_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{\sin u\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s},$$

其中 θ 表示曲线与径线的交角.

3　求位于半径为 R 的球面上半径为 a 的圆的测地曲率.

4　求位于正螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, av\}$ 上的圆柱螺线 $\boldsymbol{r}=\{u_0\cos v, u_0\sin v, av\}$ 的测地曲率.

5　设曲面 S 上的曲率线(C),(C)上点 P 不是 S 上的抛物点,证明(C)在点 P 的测地曲率的绝对值等于在 S 的球面映射下(C)的像在对应点的测地曲率与(C)在 P 点的法曲率之积的绝对值.

6　若曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上曲线$(C):u=u(t), v=v(t)$,t 为曲线(C)上的任意参数.试导出测地曲率 k_g 的计算公式.

7　求证旋转面的子午线是测地线,而平行圆仅当子午线的切线平行于旋转轴时才是测地线.

8　求证:

(1) 如果测地线同时为渐近线,则它是一直线;

(2) 如果测地线同时为曲率线,则它是一平面曲线.

9　已知曲面的第一基本形式 $\mathrm{I}=v(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$,证明它上面的测地线是 uv 平面上的抛物线.

10　求正螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, av\}$ 上的测地线.

11　利用刘维尔公式证明:

(1) 平面上的测地线为直线;

(2) 圆柱面上的测地线为圆柱螺线.

12　证明:若曲面上非直线的所有测地线均为平面曲线,则它必为曲率线.

13　如果在曲面上引入半测地坐标网:

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+G(u,v)\mathrm{d}v^2,$$

求证：

$$k_g \mathrm{d}s = \mathrm{d}\left[\arctan\left(\sqrt{G}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)\right] + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\mathrm{d}v.$$

14　给出曲面的第一基本形式是 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2$，如果此曲面上的测地线与 u - 曲线的交角是 α，求证

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}v} = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

15　证明若曲面上两族测地线交于定角，则曲面是可展曲面.

16　求半径为 R 上的球面上测地三角形三内角之和.

17　利用高斯 - 波涅公式证明若曲面 S 上存在两族交于定角的测地线，则它的高斯曲率处处为零.

18　若曲面 S 的高斯曲率处处小于零，则曲面 S 上不存在围成单连通区域的光滑闭测地线.

19　设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是沿曲面上曲线 (C) 的向量场，f 是定义在 (C) 上的数量函数，证明下列绝对微分的运算性质：

(1) $\mathrm{D}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{D}\boldsymbol{a} + \mathrm{D}\boldsymbol{b}$;

(2) $\mathrm{D}(f\boldsymbol{a}) = \mathrm{d}f\boldsymbol{a} + f\mathrm{D}\boldsymbol{a}$;

(3) $\mathrm{d}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \mathrm{D}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{D}\boldsymbol{b}$.

20　设 $\boldsymbol{a}(s), \boldsymbol{b}(s)$ 是沿曲线 $(C): \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 的两个平行向量场，证明 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} =$ 常数. 并由此证明一点处两向量沿曲面曲线作列维 - 奇维塔平行移动时，它们的长度和夹角不变.

§7　常高斯曲率的曲面

在曲面 $S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 上建立半测地坐标网，则曲面的第一基本形式可简化为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + G(u, v)\mathrm{d}v^2.$$

当曲面的高斯曲率是正常数时，即 $K = \text{const} > 0$ 时，曲面的第

一基本形式是

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 \sqrt{K}u du^2,$$

它与球面有相同的第一基本形式.

当曲面的高斯曲率是常数0,即 $K=0$ 时,曲面的第一基本形式是

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

它与平面有相同的第一基本形式.

当曲面的高斯曲率是负常数时,即 $K=\text{const}<0$ 时,它的第一基本形式是

$$ds^2 = du^2 + \cosh^2(\sqrt{-K}u)dv^2,$$

作为实例,可以构造一种负常高斯曲率曲面——伪球面.它的方程为

$$\begin{cases} x = a\sin t\cos\theta, \\ y = a\sin t\sin\theta, \\ z = \pm a\left(\ln\tan\frac{t}{2} + \cos t\right), \end{cases}$$

它的高斯曲率 $K = -\frac{1}{a^2} < 0$.

§8 全章小结

曲面论是经典微分几何的核心部分.这里讨论了与曲面的外形无关而只与它的度量有关的所谓内蕴性质,和曲面在正常点邻近结构的所谓曲面的外在性质.最后又给出了一个奇妙的在微分几何的发展历史上具有里程碑意义的高斯定理,定理指出:高斯曲率 K 是内蕴量,即它可以只由第一基本形式决定.这就意味着曲面上的度量性质中就孕育了曲面的一些外在性质,包括曲面上一点邻近的结构.

阅读和复习本章的内容可以参看如下框架图表:

曲面 S

- $\mathrm{I} = g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$ 计算曲面上曲线的弧长、曲面域的面积、两切方向的夹角.
- $\mathrm{II} = L_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$ → 曲面上曲线的曲率 $k\cos\theta = \dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$
  - → 法截线曲率 → 法曲率 → 主曲率
    - $k_0 = \left|\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}\right|$ $k_n = \dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$ $k_1 k_2$
    - 主曲率 → K, H
    - K:
      - $k > 0$ 椭圆点
      - $k = 0$ 抛物点
      - $k < 0$ 双曲点
  - → 测地曲率 → 测地线
    - $k_g = \ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ $= (\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{n}$ $= \pm k\sin\theta$
    - $k_g \equiv 0$ 局部短程线
- 基本方程($\boldsymbol{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{r}_k + L_{ij}\boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{n}_i = L_{ik}g^{kj}\boldsymbol{r}_j$).
- 可积条件($K = -\dfrac{R_{1212}}{g}$; $\dfrac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} - \dfrac{\partial L_{ik}}{\partial u^j} = \Gamma_{ik}^l L_{ej} - \Gamma_{ij}^l L_{ek}$).
- 黎曼曲率张量 $R_{ijk}^l = g^{ml}(L_{ij}L_{km} - L_{ik}L_{jm})$.
- $R_{mijk} = L_{ij}L_{mk} - L_{ik}L_{mj}$.

（以上四式：曲面论的基本定理．高斯—波涅公式）

第三章　外微分形式和活动标架

§1　外微分形式

1.1　Grassmann 代数

(1) 主要概念：

2^n 维向量空间 $\boldsymbol{G(V)}$、外乘、Grassmann 代数.

设 V 是 n 维实向量空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是它的一组基.

$$G(V) = V^0 \oplus V^1 \oplus \cdots \oplus V^p \oplus \cdots \oplus V^n,$$

其中 $V^0 = \mathbf{R}$，$V^n \approx \mathbf{R}$，

$$V^p = \left\{ \sum_{1 \leqslant a_{i_1} < \cdots < a_{i_p} \leqslant n} a_{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \right\}.$$

(2) 主要性质和公式：

命题 1　Grassmann 代数满足反交换律.

设 $x \in V^p$，$y \in V^q$，则

$$x \wedge y = (-1)^{pq} y \wedge x.$$

推论　设 $x, y \in V^1$，则

$$x \wedge y = -y \wedge x, x \wedge x = 0.$$

命题 2　设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组基，$y_1, y_2, \cdots, y_p \in V$，$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \ (i = 1, 2, \cdots, p)$，则有

$$y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge y_p = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{pi_1} & \cdots & a_{pi_p} \end{vmatrix} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}.$$

推论 1　V 中的一组向量 $y_1, y_2, \cdots, y_p$ 是线性无关的必要和充分条件是

$$y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge y_p \neq 0.$$

推论 2　设 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 是 V 的另一组基，并且 $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j (i = 1, 2, \cdots, n)$，$\det(a_{ij}) \neq 0$，则有

$$y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge y_n = \det(a_{ij}) e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

附记：如果 $\det(a_{ij}) > 0$，则 V 中两组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 和 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 的定向相同；若 $\det(a_{ij}) < 0$，则定向相反.

习题　3.1.1

1　设 V 是 n 维实向量空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是它的一组基. 命 $a = e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_p (0 < p < n)$. 如果 V 中有一向量 v 满足条件：$v \wedge a = 0$，则 v 一定是 $e_1, e_2, \cdots, e_p$ 的线性组合. 试证明之.

2　上题中，命 $a = e_1 \wedge e_2 \oplus \cdots \oplus e_{2r-1} \wedge e_{2r}$，求证：

$$a^r = \underbrace{a \wedge a \wedge \cdots \wedge a}_{r\text{个}} \neq 0, a^{r+1} = 0.$$

1.2　外微分形式

(1) 主要概念：

坐标域 U 上的 C^∞ - 函数**环** K，交换环 K 上的**模** V、**外微分**、**外微分形式**、p **次外形式**(简称 p - 形式).

(2) 主要性质和公式：

设坐标域 U 中点的坐标是 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$，它们的微分是 $(\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \cdots, \mathrm{d}x^n)$. V 是以 $\{\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \cdots, \mathrm{d}x^n\}$ 为基底的系数属

于 U 上的 C^{∞} - 函数环 K 的模.然后用 V 做 Grassmann 代数:

$$G(V)=V^0\oplus V^1\oplus\cdots\oplus V^n,$$

其中 $V^0=K, V^1=V, V^n=\{a(x^1,x^2,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\}\approx K, V^p=\{\omega_p=\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}a_{i_1\cdots i_p}(x^1,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\mathrm{d}x^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\}$.

定义 外微分 $\mathrm{d}: V^p\to V^{p+1}$ 为对于 $\omega_p\in V^p$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_p&=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\mathrm{d}a_{i_1\cdots i_p}(x^1,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\\&=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\right)\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}.\end{aligned}$$

定义了外微分的 Grassmann 代数$(G(V),\mathrm{d})$称为 U 上的**外微分形式代数**,它的元素称为 U 上的**外微分形式**,其中 V^p 中的元素称为 U 上的 **p 次外形式**(或 p - 形式).1 - 形式又称 **Pfaff 形式**.

Cartan 引理 给出 U 上的 p 个线性无关的 Pfaff 形式 $f_1, f_2,\cdots,f_p(1\leqslant p\leqslant n)$.如果在 U 上另有 p 个 Pfaff 形式 $g_1,g_2,\cdots,g_p$,使得

$$f_1\wedge g_1+f_2\wedge g_2+\cdots+f_p\wedge g_p=0,$$

则存在 U 上的 C^{∞} - 函数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,p)$,使得

$$g_i=\sum_{j=1}^p a_{ij}f_j\quad(i=1,2,\cdots,p),$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}$.

推论 如果 U 上存在两个 C^{∞} - 函数 f 和 g,满足 $f\wedge g=0$,则存在 U 上另一个 C^{∞} - 函数 a 使得 $g=af$.

Poincaré 引理 设 $\omega\in G(V)$,则

$$\mathrm{d}^2\omega=\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0.$$

Stokes 公式 设 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个 p 维区域$(1\leqslant p\leqslant n)$,$\partial G$ 是 G 的边缘,$\omega\in V^{p-1}$,则下列公式成立:

$$\int_{\partial G} \omega = \int_G \mathrm{d}\omega .$$

(3) 实例:

设 U 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个区域,坐标是 $\{x,y,z\}$,K 是 C^∞ - 函数环 $\{f(x,y,z)\}$,V 是以 $\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$ 为基,系数属于 K 的模.

$$\begin{aligned}
V^0 &= K,\\
V^1 &= V = \{P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + \\
&\qquad R(x,y,z)\mathrm{d}z\},\\
V^2 &= \{P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \\
&\qquad R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\},\\
V^3 &= \{f(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\}\\
&\approx \{f(x,y,z)\} = K,
\end{aligned}$$

其中 P,Q,R,f 都是 x,y,z 的 C^∞ - 函数.

设 $\omega\in V^1$,$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$,则

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0.$$

再设 $\omega\in V^2$,$\omega = P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0.$$

思考题:用此实例验证命题 5 和 Stokes 公式.

习题　3.1.2

1　设 $\omega = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j$,$a_{ij}+a_{ji}=0$,求证:$\mathrm{d}\omega = \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^k$.

2　寻找一个$(n-1)$形式 φ,使得

$$d\varphi = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

φ 的一般形式是什么?

3　设 $\varphi = yz\,dx + dz$, $\psi = zx\,dy + \cos y\,dx$, $\eta = xy\,dz - \sin z\,dy$,计算:

(1) $\varphi \wedge \psi, \psi \wedge \eta, \eta \wedge \varphi$;

(2) $d\varphi, d\psi, d\eta$.

4　设 $x = x(u,v), y = y(u,v)$,求证:

$$dx \wedge dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du \wedge dv.$$

1.3　Frobenius 定理

(1) 主要概念:

Pfaff 形式、Pfaff 方程组、等价性、完全可积、积分曲面、Frobenius 条件.

(2) 主要性质和公式:

给出坐标域 U 上的 Pfaff 形式 $\omega^l (l = 1,2,\cdots,p)$,如果存在 U 上的 Pfaff 形式 $f_k^l (l,k = 1,2,\cdots,p)$,使得

$$d\omega^l = \sum_{k=1}^{p} f_k^l \wedge \omega^k \quad (l = 1,2,\cdots,p),$$

则称 Pfaff 形式 $\omega^l (l = 1,2,\cdots,p)$是满足 Frobenius 条件的,不过,常用的是这个条件的等价命题.

$$d\omega^l \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^p) \quad (l = 1,2,\cdots,p).$$

命题　如果两个 Pfaff 方程组 $\omega^l = 0$ 和 $\pi^l = 0 (l = 1,2,\cdots,p)$ 是等价的,并且其中一组 Pfaff 形式满足 Frobenius 条件,则另一组 Pfaff 形式也满足 Frobenius 条件.

Frobenius 定理　如果一组 Pfaff 形式 $\omega^l \ (l = 1,2,\cdots,p)$满足 Frobenius 条件,则 Pfaff 方程组 $\omega^l = 0 (l = 1,\cdots,p)$是完全可积的.

下面要指出:一个 Pfaff 方程组等价于一个一阶偏微分方程

组,而 Pfaff 方程组的 Frobenius 条件就是这个等价的一阶偏微分方程组的完全可积条件.

设 U 是 $\mathbf{R}^{n+p}$ 中的一个区域,坐标是$(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^p)$我们把 U 上的 Pfaff 方程组 $\omega^l=0 \quad (l=1,2,\cdots,p)$写成以下形式:

$$\omega^l \equiv \sum_{i=1}^{n} \psi_i^l(x,y)\mathrm{d}x^i + \sum_{k=1}^{p} \psi_{n+k}(x,y)\mathrm{d}y^k = 0 \quad (l=1,2,\cdots,p).$$

其中 $\det(\psi_{n+k})\neq 0$,于是我们可以从这组 Pfaff 方程解出 $\mathrm{d}y^k(k=1,2,\cdots,p)$,从而得到 Pfaff 方程组 $\omega^l=0(l=1,2,\cdots,p)$的等价 Pfaff 方程组

$$\pi^l \equiv \mathrm{d}y^l - \sum_{i=1}^{n} \psi_i^l(x,y)\mathrm{d}x^i = 0 \quad (l=1,2,\cdots,p).$$

这个 Pfaff 方程组又等价于一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial y^l}{\partial x^i} = \varphi_i^l(x,y) \quad (i=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,p). \qquad (*)$$

Pfaff 方程组 $\pi^l=0 \quad (l=1,2,\cdots,p)$的 Frobenius 条件是:

$$\mathrm{d}\pi^l = \sum_{k=1}^{p} \omega_k^l \wedge \pi^k = 0(l=1,2,\cdots,p) \quad (\text{因为 } \pi^l=0),$$

即

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\pi^l &= -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\varphi_i^l(x,y)\wedge \mathrm{d}x^i \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \varphi_i^l}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\wedge \mathrm{d}x^i + \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial \varphi_i^l}{\partial y^k}\mathrm{d}y^k\wedge \mathrm{d}x^i\right) \\ &= -\sum_{ij=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_i^l}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial \varphi_i^l}{\partial y^k}\varphi_j^k\right)\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i = 0.\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{d}x^i\wedge \mathrm{d}x^j = -\mathrm{d}x^j\wedge \mathrm{d}x^i$,所以

$$\frac{\partial \varphi_i^l}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial \varphi_i^l}{\partial y^k}\varphi_j^k = \frac{\partial \varphi_j^l}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial \varphi_j^l}{\partial y^k}\varphi_i^k = 0$$

$$(i,j=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,k).$$

根据方程组$(*)$,它也可以写成

$$\frac{\partial^2 y^l}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 y^l}{\partial x^j \partial x^i} \quad (i,j=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,k).$$

这就是一阶偏微分方程组(*)的完全可积条件.

习题 3.1.3

给出 Pfaff 形式 $\omega = yz\mathrm{d}x + zx\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$,先证明它满足 Frobenius 条件,然后再给出 Pfaff 方程 $\omega = 0$ 的通解.

§2 活动标架

2.1 合同变换群

(1) 主要概念:

$\mathbf{R}^3$ 中的合同变换、活动标架.

(2) 主要性质和公式:

给出 $\mathbf{R}^3$ 中一个直角坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, $\mathbf{R}^3$ 中任一点 P 的坐标是 (x_1, x_2, x_3),即

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + x_3 \boldsymbol{e}_3.$$

设合同变换 T 把 P 点变成 P' 点,后者的坐标是 (x'_1, x'_2, x'_3),即

$$\boldsymbol{r}' = \overrightarrow{OP'} = x'_1 \boldsymbol{e}_1 + x'_2 \boldsymbol{e}_2 + x'_3 \boldsymbol{e}_3,$$

现在我们要给出合同变换下的坐标变换公式.

设合同变换 T 把直角坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 变成另一个直角坐标系 $\{O'; \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$,使得

$$\overrightarrow{OO'} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + a_3 \boldsymbol{e}_3,$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{e}_j} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \boldsymbol{e}_i \quad (j = 1, 2, 3).$$

容易证明:合同变换 T 的坐标变换公式是

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + a_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

其中系数矩阵(a_{ij})是正交矩阵，即

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}, \sum_{i=1}^{3} a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk} \quad (j,k=1,2,3),$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{当 } j \neq k, \\ 1, & \text{当 } j = k, \end{cases}$$

$$\Delta = \det(a_{ij}) = \pm 1.$$

注意：合同变换的坐标变换公式中的系数，完全由直角坐标系$\{O'; e'_1, e'_2, e'_3\}$所确定，因此，$\mathbf{R}^3$ 中的合同变换和直角坐标系是一一对应的，一个直角坐标系确定一个合同变换. 我们把直角坐标系称为**标架**，变动的直角坐标系称为**活动标架**.

命题 $\mathbf{R}^3$ 中的全体合同变换或全体标架构成一个群，称为合同变换群.

2.2 活动标架

设活动标架$\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$变动时光滑地依赖于 p 个参数$(0 < p \leqslant 6)$，则

$$\{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2, \cdots, u^6); \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i(u^1, u^2, \cdots, u^6) \quad (i=1,2,3)\}$$

称为 p - 参数**活动标架**.

计算 p - 参数活动标架$\{\boldsymbol{r}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$的无穷小位移：

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} \omega^i(u, \mathrm{d}u)\boldsymbol{e}_i, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j(u, \mathrm{d}u)\boldsymbol{e}_j, \end{cases}$$

其中系数 ω^i 和 ω_i^j 都是参数$(u^1, u^2, \cdots, u^p)$的 Pfaff 形式，称为活动标架$\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$的**相对分量**.

因为 $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$，把此式外微分以后，得到

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad (i,j=1,2,3).$$

所以 $\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0$，并且

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1, \omega_2^3 = -\omega_3^2, \omega_3^1 = -\omega_1^3.$$

相对分量中只有六个是独立的,这与合同变换的系数或活动标架的参数只有六个是独立的这一事实是一致的.

活动标架$\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$的无穷小位移实际上就是活动标架的微分方程,系数是相对分量.这组微分方程是否完全可积呢?必须讨论它的可积条件,即 Frobenius 条件 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})=0$ 和 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i)=0(i=1,2,3)$.于是我们得到了活动标架$\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$的结构方程:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega^i = \sum_{j=1}^{3} \omega^j \wedge \omega_j^i, (i = 1,2,3), \\ \mathrm{d}\omega_i^j = \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j, (i,j = 1,2,3). \end{cases}$$

2.3 活动标架法

(1) 主要思想:

$\mathbf{R}^3$中的合同变换群是全体活动标架所组成的群.给出一个带有 p 个参数的几何图形.(实例:曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,是单参图形;曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u.v)$是双参图形.)设法使图形的每一个点对应一个标架,则这个几何图形就转换成 p - 参数活动标架,于是,这个 p - 参数活动标架的无穷小位移就变成了所研究图形的微分方程.于是图形的研究重点就变成了去计算 p - 参数活动标架的相对分量,再计算这组相对分量应满足的结构方程,使得微分方程完全可积.因此,我们所研究的几何图形的微分性质,完全由它所对应的活动标架的无穷小位移的相对分量和它们所满足的结构方程所确定.这就是法国数学家 E. Cartan 所创造的**活动标架法**的主要思想.

(2) 活动标架法的计算步骤:

第一步:寻找与所研究的几何图形一一对应的 p - 参数伏雷内活动标架$\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$.

第二步:计算 p - 参数活动标架的无穷小位移.从而确定活动标架的相对分量 $\omega^i,\omega_i^j(i,j=1,2,3)$.

第三步:计算活动标架的相对分量应满足的结构方程:

$$d\omega^i = \sum_{j=1}^{3} \omega^j \wedge \omega_j^i, \qquad (i=1,2,3),$$

$$d\omega_i^j = \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \qquad (i,j=1,2,3).$$

(3) 实例:

研究空间曲线 $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$的几何性质:

第一步:寻找与空间曲线 $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$一一对应的单参数活动标架.它就是空间曲线的伏雷内标架:$\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s), \boldsymbol{e}_3(s)\}$:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}, \boldsymbol{e}_2 = \frac{\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}}{\left|\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}\right|}, \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2.$$

第二步:计算伏雷内标架的无穷小位移:

$$d\boldsymbol{r} = \omega^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega^2 \boldsymbol{e}_2 + \omega^3 \boldsymbol{e}_3,$$

$$d\boldsymbol{e}_1 = \omega_1^2 \boldsymbol{e}_2 + \omega_1^3 \boldsymbol{e}_3,$$

$$d\boldsymbol{e}_2 = \omega_2^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2^3 \boldsymbol{e}_3,$$

$$d\boldsymbol{e}_3 = \omega_3^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2 \boldsymbol{e}_2.$$

因为 $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_1 ds$,所以 $\omega^1 = ds, \omega^2 = 0, \omega^3 = 0$. 因为 $d\boldsymbol{e}_1 = \left|\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}\right| \boldsymbol{e}_2 ds$,所以 $\omega_1^3 = -\omega_3^1 = 0$. 命

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1 = k(s)ds, \qquad \omega_2^3 = -\omega_3^2 = \tau(s)ds.$$

我们得到了伏雷内方程

$$\begin{cases} d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_1 ds, \\ \dfrac{d\boldsymbol{e}_1}{ds} = \qquad k(s)\boldsymbol{e}_2, \\ \dfrac{d\boldsymbol{e}_2}{ds} = -k(s)\boldsymbol{e}_1 \qquad + \tau(s)\boldsymbol{e}_3, \\ \dfrac{d\boldsymbol{e}_3}{ds} = \qquad -\tau(s)\boldsymbol{e}_2. \end{cases}$$

所以,空间曲线的活动标架的无穷小位移实际上就是伏雷内方程.

第三步:再计算相对分量所应满足的结构方程.由于相对分量 ω^i, ω_i^j 都是单参 Pfaff 形式.它们的外微分等于零,即 $d\omega^i=0$, $d\omega_i^j=0$,因此与空间曲线相对应的单参活动标架没有结构方程,换言之,伏雷内方程是完全可积的,也就是说:给出了空间曲线 C 的曲率 $k(s)$ 和挠率 $\tau(s)$,伏雷内方程是完全可积的,通过积分确定了活动标架 $\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s),\boldsymbol{e}_3(s)\}$.自然也就确定了曲线的方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$.

§3 用活动标架法研究曲面

主要计算和主要公式:

给出曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$,我们选取正交坐标网,则有

$$\mathrm{I}=ds^2=d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=E du^2+G dv^2,$$

其中 $E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u$, $F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=0$, $G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v$.

与曲面 S 一一对应的双参活动标架是 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$.

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{r}_u}{|\boldsymbol{r}_u|}=\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_v|}=\frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}},\quad \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2.$$

先计算活动标架 $\{\boldsymbol{r};\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 的无穷小位移.

$$d\boldsymbol{r}=\omega^1\boldsymbol{e}_1+\omega^2\boldsymbol{e}_2+\omega^3\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv.$$

所以 $\omega^1=\sqrt{E}du$, $\omega^2=\sqrt{G}dv$, $\omega^3=0$,

$$\mathrm{I}=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2.$$

再计算相对分量 $\omega^i(i=1,2,3)$ 的结构方程

$$d\omega^3=\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3=0,$$

根据 Cartan 引理,

$$\omega_1^3=a(u,v)\omega^1+b(u,v)\omega^2,$$
$$\omega_2^3=b(u,v)\omega^1+c(u,v)\omega^2.$$

曲面的第二基本形式是

$$\mathrm{II} = -\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n} = -\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2,$$

$$\begin{aligned}-\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 &= -(\omega^1\boldsymbol{e}_1 + \omega^2\boldsymbol{e}_2)\cdot(\omega_3^1\boldsymbol{e}_1 + \omega_3^2\boldsymbol{e}_2)\\ &= \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3\\ &= a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2.\end{aligned}$$

所以

$$a = \frac{L}{E},\quad b = \frac{M}{\sqrt{EG}},\quad c = \frac{N}{G},$$

$$\omega_1^3 = \frac{L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v}{\sqrt{E}},\qquad \omega_2^3 = \frac{M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v}{\sqrt{G}},$$

$$\mathrm{d}\omega^1 = \omega^2\wedge\omega_2^1,\qquad \mathrm{d}\omega^2 = \omega^1\wedge\omega_1^2.$$

命 $\omega_1^2 = g_1(u,v)\omega^1 + g_2(u,v)\omega^2$,从上两式容易证明:

$$g_1 = \frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2},\qquad g_2 = \frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}.$$

所以

$$\omega_1^2 = \frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1\wedge\omega^2}\omega^1 + \frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1\wedge\omega^2}\omega^2.$$

注意: $\omega^1 = \sqrt{E}\mathrm{d}u,\quad \omega^2 = \sqrt{G}\mathrm{d}v$,于是得到

$$\omega_1^2 = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_v\mathrm{d}u - G_u\mathrm{d}v).$$

曲面的法曲率是

$$k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}.$$

曲面的主曲率是 k_n 的极值,所以满足极值条件:

$$k = \frac{a\omega^1 + b\omega^2}{\omega^1} = \frac{b\omega^1 + c\omega^2}{\omega^2}.$$

所以主曲率 k_1 和 k_2 是下列二次方程的根

$$(a-k)(c-k) - b^2 = 0.$$

曲面的高斯曲率 $K = k_1\cdot k_2 = ac - b^2 = \dfrac{LN - M^2}{EG}.$

曲面的平均曲率 $H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=\frac{a+c}{2}=\frac{LG+NE}{2EG}$.

如果我们在曲面 S 上选取曲率线网,则

$$k_1=a,\quad k_2=c,\quad b=M=0,$$

$$\mathrm{II}=k_1(\omega^1)^2+k_2(\omega^2)^2.$$

如果 G 是曲面 S 上的单连通区域,G 的边缘 ∂G 是一条光滑的闭曲线,则有高斯－波涅公式

$$\int_G K\omega^1\wedge\omega^2+\int_{\partial G}k_g\mathrm{d}s=2\pi,$$

其中 k_g 是 G 的边缘 ∂G 的测地曲率.

如果 S 是单连通的闭曲面,则有

$$\int_S K\omega^1\wedge\omega^2=4\pi.$$

如果 ∂G 是逐段光滑的,它在非光滑点处的内角为 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,p)$,则高斯－波涅公式应为

$$\int_G K\omega^1\wedge\omega^2+\int_{\partial G}k_g\mathrm{d}s+\sum_i(\pi-\alpha_i)=2\pi.$$

如果 ∂G 是测地多边形,则 $k_g=0$,所以

$$\int_G K\omega^1\wedge\omega^2+\sum_i(\pi-\alpha_i)=2\pi.$$

习题　3.3

1　设曲面的第一基本形式是 $\mathrm{I}=\mathrm{d}s^2=E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2$,计算相对分量 ω_1^2 和高斯曲率 K,特别地,如果

$$\mathrm{I}=4\frac{\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}{[1-(u^2+v^2)]^2}\quad 或\quad \mathrm{I}=\frac{\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}{v^2},$$

求证:$K=-1$.

2　设曲面的第一基本形式是 $\mathrm{I}=[U(u)+V(v)](\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$,计算相对分量 $\omega_1^2,\omega_2^3,\omega_3^1$ 和高斯曲率 K.

3　设曲面的第一基本形式是

$$\mathrm{I}=\frac{\mathrm{d}u^2-4v\mathrm{d}u\mathrm{d}v+4u\mathrm{d}v^2}{4(u-v^2)}\quad(u>v^2).$$

计算:相对分量 $\omega_1^2,\omega_2^3,\omega_3^1$和高斯曲率 K.

4 设曲面域 G 中高斯曲率 $K\leqslant 0$,则 G 中任意两条测地线不能相交.

5 曲面域 A 是一个四边形,它的四个顶点 $P_i(i=1,2,3,4)$ 处的内角分别为 l_1,l_2,l_3,l_4,求证:

$$\int_A K\omega^1\wedge\omega^2+\int_{\partial A}k_g\mathrm{d}s=l_1+l_2+l_3+l_4-2\pi.$$

6 把定向(非单连通)闭曲面 S 剖分成若干个四边形,使得每一顶点周围各有 4 个四边形,求证:

$$\int_S K\omega^1\wedge\omega^2=0.$$

7 设 φ 是定义在一个定向闭曲面 S 上的 Pfaff 形式,求证:

$$\int_S\mathrm{d}\varphi=0.$$

8 设曲面的第一基本形式是 $\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2$,命 $\omega^1=\sqrt{E}\mathrm{d}u+\frac{F}{\sqrt{E}}\mathrm{d}v$,求证:

$$\mathrm{I}=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2.$$

9 设 $E(u,v),F(u,v),G(u,v)$是曲面的第一基本量,作曲面的参数变换 $\tilde{u}=\tilde{u}(u,v),\tilde{v}=\tilde{v}(u,v)$,命 $\tilde{E},\tilde{F},\tilde{G}$ 是新参数表示的第一基本量,求证:

$$\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}\,\mathrm{d}\tilde{u}\wedge\mathrm{d}\tilde{v}.$$

10 设(u,v)是曲面 S 上的曲率线网,它的第一基本形式是 $\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2$,主曲率分别为 k_1和 k_2,试用 E,G,k_1,k_2来计算相对分量 $\omega^1,\omega^2,\omega_1^2,\omega_2^3$和 ω_1^3.

第四章　整体微分几何初步

§1　平面曲线的整体性质

1.1　旋转数

(1) 主要概念：

逐段光滑的平面曲线、**角点**、**正常点**、**正规**曲线.平面正规闭曲线的**周期**、**简单曲线**、**切映射**、**旋转数**.

(2) 主要性质和公式：

给出平面曲线(C):$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))\quad(a\leqslant t\leqslant b)$.它的曲率是

$$k(t)=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

设θ是x轴的正向与曲线(C)在点$\boldsymbol{r}(t)$的切线的夹角,则

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=k(t)\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|.$$

设(C)是逐段光滑的正规闭曲线,定义它的**旋转数**是

$$n_C=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1}[\theta(a_{j+1})-\theta(a_j)]+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j,$$

其中α_j是(C)的角点$\boldsymbol{r}(a_j)\quad(j=0,1,\cdots,n-1)$处的外角.

$$\theta(a_{j+1})-\theta(a_j)=\int_{a_j}^{a_{j+1}}k(t)\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t.$$

$$n_C = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}} k(t)\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j.$$

旋转数定理 如果(C)为平面上正规的、简单的闭曲线，则它的旋转数 $n_C = \pm 1$.

习题 4.1.1

1 设曲线(C)是由直线段与两条半径为 2 的圆弧构成的图形，计算它的旋转数.

2 给出平面曲线(C)：$x(t)=\cos t, y(t)=\sin 2t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$，计算它的旋转数.

1.2 凸曲线

(1) 主要概念:

凸曲线.

(2) 主要性质:

引理 设(C)：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，$(0 \leqslant s \leqslant L)$是平面上简单的、正规的、闭凸曲线.如果存在一对自然参数 s_1 和 s_2 使得 $\theta(s_1)=\theta(s_2)$，则(C)在$[s_1, s_2]$上的部分是直线段.

推论 平面上简单的、正规的、闭凸曲线的旋转角 $\theta(s)$是单调的.

凸曲线的判定定理 平面上简单的、正规的闭曲线是凸的必要和充分条件是：曲率函数 $k(s)$不变号.

习题 4.1.2

设曲线(C)是平面上一条闭的凸曲线.如果直线(l)交(C)于三点，则连接这些点的直线段属于曲线(C)，因此，平面上凸闭曲线的曲率 $k \neq 0$ 时，一条直线最多与它交于两点，试证明之.

1.3 等周不等式

主要公式：

等周不等式：设平面曲线(C)是周长为 L 的简单的、正规闭曲线、A 是(C)所包围区域的面积.则有

$$L^2 \geqslant 4\pi A,$$

其中等号当且仅当(C)是圆周时成立.

习题 4.1.3

1 设平面简单闭曲线的周长为 6 cm，所包围的面积是 3 cm^2，这条曲线是否存在？

2 设(C)是平面简单闭曲线，长为 L，曲率 k 满足 $0\leqslant k\leqslant \frac{1}{r}$（$r$ 是常数）.求证：$L\geqslant 2\pi r$.

3 设 $\overline{AB}$ 是直线段，(C)是通过 A、B 两点的长度为 L 的简单曲线，求证：(C)是圆弧时，它与 $\overline{AB}$ 包围的面积最大.

1.4 四顶点定理

(1) 主要概念：

卵形线、**顶点**.

(2) 主要性质：

四顶点定理：一条卵形线至少有四个顶点.

习题 4.1.4

1 如果平面曲线(C)是卵形线，$\boldsymbol{\alpha}$ 是切向量，则至少存在四点，使得 $\dddot{\boldsymbol{\alpha}} /\!/ \boldsymbol{\alpha}$.

2 如果略去闭的条件，则四顶点定理不成立，用抛物线 $x(t)=t$，$y(t)=t^2$ 作为反例加以证明.

3 求平面上的椭圆：$x(t)=a\cos t$，$y(t)=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant$

2π)的顶点坐标.

1.5 等宽曲线

(1) 主要概念:

相对点、等宽曲线.

(2) 主要性质:

等宽曲线定理: 如果平面曲线(C)是等宽的卵形线,宽度为 w,则(C)的长度是 $w\pi$.

习题 4.1.5

1 设曲线(C)是等宽卵形线,求证:连接相对点的直线与相对点的切线正交.

2 设曲线(C)是等宽卵形线,求证:相对点处曲率半径之和是常量.

1.6 平面曲线上的 Crofton 公式

(1) 主要公式:

设平面上直线的方程是

$$l: x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0.$$

则平面上全体直线 l 所组成的空间的参数为(p,θ).

Crofton 公式 平面上与(C)相交的直线集为

$$\mathrm{U} = \{l : l \cap (C) \neq \varnothing\}.$$

设直线 l 与(C)相交于 $n(l)$ 个点,则有公式

$$\int_{\mathrm{U}} n(l)\,\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}\theta = 2L,$$

其中 $\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}\theta$ 是集 U 的面积元素,L 是曲线(C)的长度.

习题 4.1.6

设平面曲线(C)是闭凸曲线,曲线所包围的面积为 A,用 σ 表

示直线 l 上的弦长,证明

$$\int_{l\cap(C)\neq\varnothing}\sigma\,\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}\theta=\pi A.$$

§2 空间曲线的整体性质

2.1 Fenchel 定理

(1) 主要概念:

空间曲线的**切映射**、**全曲率**.

(2) 主要性质和公式:

Fenchel 定理:对于一条空间简单的、正规的闭曲线(C):$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),s\in[0,L]$,设它的曲率为 $k(s)$,则它的全曲率为

$$\int_0^L k(s)\mathrm{d}s\geqslant 2\pi,$$

其中等号当且仅当(C)是平面简单、正规、凸闭曲线时成立.

推论 设(C)是逐段正规的,它的每一角点的外角是 θ_j $(j=1,2,\cdots,k)$,则有

$$\int_0^L k(s)\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{k}\theta_j\geqslant 2\pi.$$

习题 4.2.1

1 命(C):$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$是空间曲线,设 $0\leqslant k(s)\leqslant\frac{1}{R}$ $(R>0)$.求证:曲线(C)的长度至少是 $2\pi R$.

2 考虑一条由三条半径为 2 的圆弧围成的逐段光滑的平面正规非凸曲线(C),计算它的全曲率.

3 用椭圆 $\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,b\sin\theta\}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,a,b>0)$,来验证

Fenchel 定理.

4 证明:空间正规闭曲线的切映射的象不可能在同一个半球面内.

2.2 球面上的 Crofton 公式

(1) 主要概念:

球面上定向大圆的**极点**、球面上的定向大圆集的**测度**.

(2) 主要性质和公式:

球面上的 Crofton 公式 设 W 是球面 S 上的定向大圆 $W^{\perp}$ 的极点.(C)是 S 上的一条曲线,命

$$\cup = \{W \in S \mid W^{\perp} \cap (C) \neq \varnothing\}$$

则有

$$\int_{\cup} n(W) \mathrm{d}A = 4L,$$

其中 $n(W)$是定向大圆 $W^{\perp}$与曲线(C)相交点的个数,dA 是极点所构成的子集的面积元素.

习题 4.2.2

1 设(C)是单位球面 S 上的大圆

$$\boldsymbol{r} = \{\cos\theta, \sin\theta, 0\} \ (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

用它来验证 Crofton 公式的正确性.

2 用球面上的 Crofton 公式验证 Fenchel 定理.

2.3 Fary - Milnor 定理

(1) 主要概念:

打结的和**不打结的**空间曲线,打结的又称为**挠的**.

(2) 主要性质和公式:

Fary - Milnor 定理:设曲线(C):$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant L)$是一条打结的、简单的、正规挠闭曲线,则它的全曲率

$$\int_C k(s)\mathrm{d}s \geqslant 4\pi.$$

2.4 闭曲线的全挠率

(1) 主要概念:

给出一条空间曲线(C):$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)\quad(0\leqslant s\leqslant L)$,$\tau(s)$是它的挠率,则$(C)$的全挠率是

$$\tilde{\tau}(s)=\int_0^L \tau(s)\mathrm{d}s.$$

(2) 主要性质:

定理 球面上的正规闭曲线的全挠率为 0.

习题 4.2.4

1 证明:对于球面上任意闭曲线有

$$\int_{(C)}\frac{\tau(s)}{k(s)}\mathrm{d}s=0,$$

其中$\tau(s)$是曲线的挠率,$k(s)$是曲线的曲率.

§3 曲面的整体性质

3.1 曲面的整体定义

主要概念:

简单曲面、C^k类曲面、坐标域、坐标函数、图册.

注意:以前我们所研究的曲面,只是曲面的局部,即一个曲面片(坐标域),在其上我们可以定义曲纹坐标,写出曲面片的坐标表达式,然后用分析的方法加以研究.这样的研究所得到的性质,只是曲面的局部性质.要得到曲面的整体性质,就必须把每一个曲面片上的局部性质"粘"起来.粘合的办法就是建立粘合部分的坐标

变换.把一个曲面片上的坐标转换成另一个被粘合的曲面片上的坐标.C^k类就是表示粘合的光滑程度.如果一个坐标域上的几何性质,经过坐标变换后保持不变,就转换成另一个坐标域上的几何性质.所以,经过坐标变换后保持不变的几何性质就是曲面的整体性质.

3.2 曲面的一般性质

(1) 主要概念:

曲面的**定向性**:如果曲面的坐标域之间的坐标变换的 Jacobi 行列式恒大于零,这时,我们说:曲面是可定向的.显然,定向性是曲面的整体性质.

曲面的**紧致性**:如果曲面的任何一个坐标图册,都可以只包括有限个坐标域,则这种特殊的曲面称为紧致曲面.

等价定义:① 曲面的任何一个开覆盖,都有有限的子覆盖.

② 曲面是紧致的当且仅当它是 $\mathbf{R}^3$ 中的有界闭集.

曲面的**连通性**:$\mathbf{R}^3$ 中的曲面是连通的,如果它是 $\mathbf{R}^3$ 中的连通子集.即不能表示成互不相交的开子集的并集.

(2) 主要性质:

定理 1 设 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中的紧致曲面,则存在一点 $P\in M$ 使得 M 在这一点的高斯曲率 $K(P)>0$.

推论 1 在 $\mathbf{R}^3$ 中不可能存在 $K\leqslant 0$ 处处成立的紧致曲面.

推论 2 在 $\mathbf{R}^3$ 中不可能存在紧致的极小曲面.

定理 2 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面是连通的必要和充分条件是:它是弧连通的.即对于曲面上任意两点,总存在曲面上联结它们的连续曲线.

3.3 卵形面

(1) 主要概念:

凸曲面、卵形面、Weingarten 曲面,椭圆型的 W-曲面.曲面

的刚性(经过等距变换后保持不变的曲面的性质),**无边缘曲面**(如果曲面的每一个坐标域都包含在曲面内,则这种曲面称为无边缘曲面).

(2) 主要性质和公式:

Hadamard 定理 设 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中定向、紧致、无边缘的凸曲面,则高斯映射是一一的和在上的.

推论 卵形面一定在它每一点的切平面的同一侧.

注意:推论的逆命题不成立. 例如:椭圆抛物面.

引理 如果紧致、连通曲面的每一点都是脐点,则此曲面是球面.

推论 1 紧致的、凸的常平均曲率曲面是球面.

推论 2 紧致的、凸的常高斯曲率曲面是球面.

Minkowski 积分公式 设 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中的紧致曲面,它的高斯曲率是 K,平均曲率是 H,若函数 $p(P)$是原点到曲面上 P 点的切平面的距离,则有下列积分公式

$$\int_M \mathrm{d}A + \int_M pH\mathrm{d}A = 0,$$

$$\int_M H\mathrm{d}A + \int_M pK\mathrm{d}A = 0.$$

Cohn - Vossen 定理 两个卵形面之间如果存在一个保长映射,则这个映射一定是 $\mathbf{R}^3$ 中的合同或对称.

定理 给出单位球面 S 和两个卵形面 M 和 M',考虑高斯映射 $\boldsymbol{n}: M \to S$ 和 $\boldsymbol{n}': M' \to S$. 如果

$$K[\boldsymbol{n}^{-1}(\xi)] = K'[\boldsymbol{n}'^{-1}(\xi)], \forall \xi \in S,$$

则 M 和 M' 合同或对称.

习题 4.3.3

下面的一系列习题是把等宽曲线的概念和性质推广到曲面上,设 M 是卵形面.

1　如果点 $P\in M$，求证：存在 M 上惟一一点 $\overline{P}$，使得 P 和 $\overline{P}$ 的切平面互相平行.

2　设 P 和 $\overline{P}$ 是 M 上具有第 1 题性质的一对点，这两点的切平面之间的距离为 d. 如果对于 $\forall P\in M$，d 是常数，则这个曲面称为**等宽曲面**. 求证：等宽曲面的相对点 P 和 $\overline{P}$ 的连线是 M 在 P 点或 $\overline{P}$ 点的法线.

3　求证：等宽曲面的相对点 P 和 $\overline{P}$ 的主方向互相平行.

4　设 P 和 $\overline{P}$ 是等宽曲面 M 上的一对相对点，$\boldsymbol{r}_1$ 是 P 点处的主方向，对应的主曲率是 k_1，$\bar{\boldsymbol{r}}_1$ 是 $\overline{P}$ 点的主方向，对应的主曲率是 $\bar{k}_1$，求证：$\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{\bar{k}_1}$ 是与 P 点无关的常数.

5　对于等宽曲面 M，求证：

$$\int_M H\mathrm{d}A = 2\pi d,$$

其中 d 是相对点 P 和 $\overline{P}$ 的切平面之间的距离.

3.4　完备曲面

(1) 主要概念：

指数映射、测地完备曲面、曲面上的距离、完备曲面.

(2) 主要性质：

定理　如果曲面是测地完备的，则对于 M 上任意两点 P 和 Q，连接 P 和 Q 的长度最短的曲线是测地线.

Hopf－Rinow 定理　对于曲面 M 来说，下面三条件是等价的：

① M 是完备度量空间；

② M 是测地完备的曲面；

③ M 的每一个有界子集的闭包是紧致的.

§4 紧致曲面的高斯－波涅公式和欧拉示性数

4.1 紧致曲面的三角剖分

主要概念：

曲面上的三角形、**曲面的三角剖分**、**曲面剖分后三角形的定向**.

4.2 紧致曲面的欧拉示性数

紧致曲面 M 三角剖分后，所有的三角形构成一个多面体.设此多面体的面数（即三角形的数目）为 F，棱数为 E，顶点数为 V，则定义紧致曲面 M 的欧拉示性数为

$$\chi(M)=F-E+V.$$

注意：用高斯－波涅公式可以证明：紧致曲面的欧拉示性数与三角剖分无关.

4.3 紧致定向曲面的亏格

（1）主要概念：

亏格(Gerus)

（2）主要性质：

命题　亏格数为 g 的紧致曲面的欧拉示性数是

$$\chi(M)=2(1-g).$$

4.4 紧致曲面的高斯－波涅公式

主要公式：

高斯-波涅公式　设 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中的紧致曲面，则有

$$\int_M K\mathrm{d}A = 2\pi\chi(M).$$

推论　设 M 是亏格数 g 的紧致曲面，则有

$$\int_M K\mathrm{d}A = 4\pi(1-g).$$

4.5　紧致曲面上的向量场

(1) 主要概念：

紧致曲面的**光滑向量场**、向量场的**奇点**和**孤立奇点**、向量场孤立奇点的**指标**.

(2) 主要公式：

给出 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面 M，在它的一个坐标域 M_i 内，曲面的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，则在 M_i 内向量场 $\boldsymbol{W}$ 的坐标表示是

$$\boldsymbol{W}(P)=a(u,v)\boldsymbol{r}_u+b(u,v)\boldsymbol{r}_v.$$

对于另一个坐标域 M_j，曲纹坐标是 $(\bar{u},\bar{v})$，则在 $M_i\cap M_j$ 上有坐标变换

$$\bar{u}=\bar{u}(u,v),\qquad \bar{v}=\bar{v}(u,v),$$

而且

$$\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}\neq 0,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}(P)&=a(u,v)\boldsymbol{r}_u+b(u,v)\boldsymbol{r}_v\\&=\bar{a}(\bar{u},\bar{v})\boldsymbol{r}_{\bar{u}}+\bar{b}(\bar{u},\bar{v})\boldsymbol{r}_{\bar{v}}.\end{aligned}$$

然而

$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{r}_{\bar{u}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}+\boldsymbol{r}_{\bar{v}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial u},\qquad \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{r}_{\bar{u}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}+\boldsymbol{r}_{\bar{v}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}.$$

所以

$$\bar{a}(\bar{u},\bar{v})=a(u,v)\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}+b(u,v)\frac{\partial\bar{u}}{\partial v},$$

$$\bar{b}(\bar{u},\bar{v})=a(u,v)\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}+b(u,v)\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}.$$

设 $\boldsymbol{V}$ 是紧致曲面 M 上的一向量场，P 是它的孤立奇点，(C) 是 M 上围绕 P 点的一条简单的、闭的，逐段光滑的曲线，使得它包围的曲面域 G 内除了 P 点以外没有 $\boldsymbol{V}$ 的其它奇点. 再设 A 是 G 中没有奇点的单位向量场，则定义 V 在奇点 P 处的指标为

$$i_P(\boldsymbol{V})=\frac{1}{2\pi}\delta(\angle(\boldsymbol{A},\boldsymbol{V})),$$

其中 $\delta(\angle(\boldsymbol{A},\boldsymbol{V}))$ 表示有向角 $\angle(\boldsymbol{A},\boldsymbol{V})$ 沿曲线 (C) 的变化.

注意：上述定义与曲线 (C) 和向量场 $\boldsymbol{A}$ 的选择无关.

命 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中的紧致曲面，$\boldsymbol{V}$ 是定义在 M 上，仅有有限个孤立奇点的向量场，则 $\boldsymbol{V}$ 的总指标定义为

$$I(V)=\sum_P i_P(\boldsymbol{V}).$$

命题 如果 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{W}$ 是定义在紧致曲面 M 上的仅有有限个奇点的向量场，则

$$I(\boldsymbol{V})=I(\boldsymbol{W}).$$

定理 设 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中的紧致曲面，$\boldsymbol{V}$ 是 M 上一个仅有有限个奇点的向量场，则

$$I(\boldsymbol{V})=\chi(\boldsymbol{M}).$$

习题 4.4

1 如果 $\mathbf{R}^3$ 的紧致曲面的高斯曲率 $K>0$，则它的亏格为零.

2 设 M 是一个紧致曲面，求证：M 的亏格为 1，当且仅当 M 上存在不带奇点的向量场.

第二部分　解题指导与答案

第一章 曲 线 论

习题 1.1

1 证明:设 $\boldsymbol{m}(t)=\{m_1(t),m_2(t),m_3(t)\}$ 是常向量,$t\in[a,b]$,任取 $t\in(a,b)$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}'(t)&=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\boldsymbol{m}(t+\Delta t)-\boldsymbol{m}(t)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to0}\left[\frac{m_1(t+\Delta t)-m_1(t)}{\Delta t}\boldsymbol{e}_1+\frac{m_2(t+\Delta t)-m_2(t)}{\Delta t}\boldsymbol{e}_2+\right.\\&\qquad\left.\frac{m_3(t+\Delta t)-m_3(t)}{\Delta t}\boldsymbol{e}_3\right]\\&=0\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

或由 $\boldsymbol{m}(t)$是常向量,故 $m_1(t),m_2(t),m_3(t)$是常函数,其微商为零,命题得证.

2 证明:$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}(t)}{\rho(t)}\right)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\rho(t)}\boldsymbol{r}(t)\right)\\&=-\frac{\rho'(t)}{\rho^2(t)}\boldsymbol{r}(t)+\frac{1}{\rho(t)}\boldsymbol{r}'(t)\\&=\frac{\rho(t)\boldsymbol{r}'(t)-\rho'(t)\boldsymbol{r}(t)}{\rho^2(t)}.\end{aligned}$$

3 证明:设 $\boldsymbol{r}(t)$在$[a,b]$上定义,且对于任一 $t\in(a,b)$有 $\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{r}(t)$是$[a,b]$上的常向量.因此在(a,b)上有任意阶微商,且都是$\boldsymbol{0}$.即

$$\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{r}''(t)=\cdots=\boldsymbol{r}^{(n)}(t)=\cdots=\boldsymbol{0},$$

于是 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$有泰勒展开式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t+\Delta t)&=\boldsymbol{r}(t)+\Delta t\boldsymbol{r}'(t)+\frac{1}{2!}(\Delta t)^2\boldsymbol{r}''(t)+\cdots+\frac{1}{n!}(\Delta t)^n\boldsymbol{r}^{(n)}(t)+\cdots\\&=\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{0}\cdot\Delta t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{0}\cdot(\Delta t)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(\Delta t)^n\cdot\boldsymbol{0}+\cdots\\&=\boldsymbol{r}(t),\end{aligned}$$

所以在 t 的邻域中 $\boldsymbol{r}(t)$ 是常向量. 考虑到 $t\in[a,b]$ 的任意性,则 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 $[a,b]$ 上是常向量.

4 证明:必要性 设 $\boldsymbol{r}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}$($\boldsymbol{e}$ 为常单位向量),则

$$\boldsymbol{r}'(t)=\lambda'(t)\boldsymbol{e},$$

所以

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{0}.$$

充分性 设 $\boldsymbol{r}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}(t)$($\boldsymbol{e}(t)$ 为单位向量函数),则

$$\boldsymbol{r}'(t)=\lambda'(t)\boldsymbol{e}(t)+\lambda(t)\boldsymbol{e}'(t),$$

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)=\lambda^2(t)[\boldsymbol{e}(t)\times\boldsymbol{e}'(t)].$$

因为 $\boldsymbol{r}(t)\neq\boldsymbol{0}$,于是 $\lambda(t)\neq0$ 当 $\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)\equiv0$,从而有

$$\boldsymbol{e}(t)\times\boldsymbol{e}'(t)=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{e}(t)/\!/\boldsymbol{e}'(t)$,因为 $\boldsymbol{e}(t)\perp\boldsymbol{e}'(t)$(根据 $|\boldsymbol{e}(t)|=1$),因此 $\boldsymbol{e}'(t)=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{e}(t)$ 为常向量,所以

$$\boldsymbol{r}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}(t)$$

有固定方向.

5 证明:必要性 设固定平面 π 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}$. 依题意 $\boldsymbol{r}(t)\perp\boldsymbol{n}$,则 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{n}=0$. 从而

$$\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{n}=0,$$

$$\boldsymbol{r}''(t)\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

$\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t)$ 均与 $\boldsymbol{n}$ 垂直,所以 $(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t))=0$.

充分性 由已知,$\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t)$ 共面. 若

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)\equiv\boldsymbol{0},$$

则由 $\boldsymbol{r}(t)\neq\boldsymbol{0}$ 可知 $\boldsymbol{r}(t)$ 有固定方向(上题),所以 $\boldsymbol{r}(t)$ 平行于固定平面.

若 $\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\neq\boldsymbol{0}$,则由 $\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t)$ 共面可知

$$\boldsymbol{r}''(t)=\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)+\mu(t)\boldsymbol{r}'(t),$$

记 $\boldsymbol{n}(t)=\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)$,则

$$\boldsymbol{n}'(t)=\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}''(t)=\mu(t)\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)=\mu(t)\boldsymbol{n}(t).$$

从而有

$$\boldsymbol{n}(t)\times\boldsymbol{n}'(t)=\boldsymbol{0},\text{但}\quad \boldsymbol{n}(t)\neq\boldsymbol{0}.$$

因此 $\boldsymbol{n}(t)$有固定方向(上题). 又 $\boldsymbol{r}(t)\perp\boldsymbol{n}(t)$,所以 $\boldsymbol{r}(t)$平行于固定平面.

6 (1) $\because [\boldsymbol{a}]'=\boldsymbol{0}$,

$\therefore\ \boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{a}$.

(2) 由于 $\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$,所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t)&=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}[a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3]\mathrm{d}t\\&=(a_1t+c_1)\boldsymbol{e}_1+(a_2t+c_2)\boldsymbol{e}_2+(a_3t+c_3)\boldsymbol{e}_3\\&=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

(3) $\boldsymbol{r}(t)=\dfrac{1}{2}t^2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$.

(4) 设 $\boldsymbol{r}(t)=\lambda_1(t)\boldsymbol{e}_1+\lambda_2(t)\boldsymbol{e}_2+\lambda_3(t)\boldsymbol{e}_3$,由 $\boldsymbol{r}'(t)=a\boldsymbol{r}(t)$ 可得

$$\lambda'_1(t)=a\lambda(t),\qquad \lambda'_2(t)=a\lambda_2(t),\qquad \lambda'_3(t)=a\lambda_3(t).$$

解上述三个常微分方程,得

$$\lambda_1(t)=\mathrm{e}^{at}c_1,\qquad \lambda_2(t)=\mathrm{e}^{at}c_2,\qquad \lambda_3(t)=\mathrm{e}^{at}c_3.$$

所以 $\boldsymbol{r}(t)=\mathrm{e}^{at}\boldsymbol{c}$,其中 $\boldsymbol{c}$ 为常向量.

7 设平面上的向量函数:$\boldsymbol{r}(t)=\{\cos t,\sin t\}$,取 $a=-\beta,b=\beta,0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)&=\boldsymbol{r}(\beta)-\boldsymbol{r}(-\beta)\\&=\{\cos\beta,\sin\beta\}-\{\cos(-\beta),\sin(-\beta)\}\\&=\{0,2\sin\beta\},\end{aligned}$$

但是 $\qquad \boldsymbol{r}'(\xi)=\{-\sin\xi,\cos\xi\}$,

若有 $$\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)=\boldsymbol{r}'(\xi)(b-a),$$
则有 $$\{0,2\sin\beta\}=\{-\sin\xi,\cos\xi\}\cdot 2\beta,$$
即有
$$\begin{cases}\sin\xi=0, & (1)\\ \sin\beta=\beta\cos\xi. & (2)\end{cases}$$
由(1) 及 $-\beta<\xi<\beta$,得 $\xi=0$.(2) 式为 $\sin\beta=\beta$,这是不可能的.

习题 1.2

1 由 $\boldsymbol{r}'(t)=\{-\sin t,\cos t,1\}$得
$$|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}=\sqrt{2}\neq 0,$$
所以曲线是正则曲线.

令 $\begin{cases}\cos t=1,\\ \sin t=0,\end{cases}$ 解出 $t=0$,则对应于点(1,0,0)有 $t=0$,所以
$$\boldsymbol{r}'(0)=\{0,1,1\},$$
则曲线在(1,0,0)点(即 $t=0$ 点)的切线方程为
$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1},$$
或
$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2+\lambda\boldsymbol{e}_3.$$
法面方程为
$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(0))\cdot\boldsymbol{r}_t'(0)=0,$$
即
$$(x-1)0+(y-0)1+(z-0)1=0,$$
$$y+z=0,$$

2
$$\boldsymbol{r}(t)=\{at,bt^2,ct^3\},$$
$$\boldsymbol{r}'(t)=\{a,2bt,3ct^2\}.$$
所以,切线方程为
$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0)=\lambda\boldsymbol{r}'(t_0),$$
即
$$\frac{x-at_0}{a}=\frac{y-bt_0^2}{2bt_0}=\frac{z-ct_0^3}{3ct_0^2}.$$
法面方程为

$$[\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0)]\cdot\boldsymbol{r}'(t_0)=0,$$

即 $$(x-at_0)\cdot a+(y-bt_0^2)\cdot 2bt_0+(z-ct_0^3)\cdot 3ct_0^2=0,$$

$$ax+2bt_0y+3ct_0^2z-(a^2t_0+2b^2t_0^3+3c^2t_0^5)=0,$$

3 $\because$ $\boldsymbol{r}'(t)=\sin 3t\{-\sin t,\cos t,0\}+3\cos 3t\{\cos t,\sin t,0\}$,

$\therefore$ $$|\boldsymbol{r}'(t)|^2=(3\cos 3t\cos t-\sin 3t\sin t)^2+(3\cos 3t\sin t+\sin 3t\cos t)^2=8\cos^2 3t+1>0.$$

故对 $t\in\mathbf{R}$, $\boldsymbol{r}(t)$是正则曲线.

以 $t=\frac{\pi}{3}$代入切线方程 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(t)+\lambda\boldsymbol{r}'(t)$,得

$$\boldsymbol{\rho}=\{0,0,0\}+\lambda\left\{\frac{-3}{2},\frac{-3\sqrt{3}}{2},0\right\},$$

即 $$\boldsymbol{\rho}=-\frac{3}{2}\lambda\{1,\sqrt{3},0\}\quad(\lambda\in\mathbf{R}).$$

或 $$\frac{x}{1}=\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{z}{0}.$$

4 (1) $\because$ $\boldsymbol{r}'_1(\theta)=\{-\sin\theta,\sin\theta-\cos\theta,-\cos\theta\}$,

$$|\boldsymbol{r}'_1(\theta)|^2=2-\sin 2\theta\neq 0,$$

$\therefore$ $\boldsymbol{r}_1(\theta)$是正则曲线,它在 $\theta=\frac{\pi}{4}$处的切线方程为:

$$\boldsymbol{\rho}_1=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},1-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}+\lambda\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}=\frac{\sqrt{2}}{2}\{1-\lambda,\sqrt{2}-2,-1-\lambda\},$$

或

$$\frac{X-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{Y-1+\sqrt{2}}{0}=\frac{Z+\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

即
$$\begin{cases} X - Z = \sqrt{2}, \\ Y = 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

(2) 因为 $\boldsymbol{r}'_2(\theta) = \{4\sin\theta\cos\theta, 4\sin^2\theta + 2\tan^2\theta, 0\}$,所以当 $\theta = n\pi$ 时($n \in \mathbf{Z}$),$\boldsymbol{r}'(\theta) = \mathbf{0}$. 故 $\boldsymbol{r}_2(\theta)$为非正则曲线,它在 $\theta = \frac{\pi}{4}$处的切线方程为:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_2 &= \{1,1,0\} + \lambda\{2,4,0\} \\ &= \{1+2\lambda, 1+4\lambda, 0\}, \end{aligned}$$

或
$$\frac{X-1}{2} = \frac{Y-1}{4} = \frac{Z}{0},$$

即
$$\begin{cases} 2X - Y = 1, \\ Z = 0. \end{cases}$$

(3) $\because$ $\boldsymbol{r}'_3(\theta) = \{-\sin\theta, -\sin 2\theta, \cos\theta\}$,

$|\boldsymbol{r}'_3(\theta)|^2 = 1 + \sin^2 2\theta \neq 0$,

$\therefore$ $\boldsymbol{r}_3(\theta)$是正则曲线,它在 $\theta = \frac{\pi}{4}$处的切线方程为

$$\boldsymbol{\rho}_3 = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} + \lambda\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\},$$

或

$$\frac{X - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{Y - \frac{1}{2}}{-1} = \frac{Z - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

5 因为 $\boldsymbol{r}'(\theta) = \{-a\sin\theta, a\cos\theta, b\}$,取 z 轴上的单位向量 $\boldsymbol{e}_3 = \{0,0,1\}$,则

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\boldsymbol{r}', \boldsymbol{e}_3}) &= \frac{\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{e}_3}{|\boldsymbol{r}'||\boldsymbol{e}_3|} \\ &= \frac{-a\sin\theta \cdot 0 + a\cos\theta \cdot 0 + b \cdot 1}{\sqrt{(-a\sin\theta)^2 + (a\cos\theta)^2 + b^2} \cdot 1} \end{aligned}$$

$$=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\text{常数}.$$

即 r' 与 e_3 的夹角不随 θ 的变化而变化，因之曲线的切线与 z 轴作固定角.

6　设 $r(\theta)=\{e^{\theta}\cos\theta, e^{\theta}\sin\theta, 0\}$，所以

$$r'(\theta)=\{e^{\theta}\cos\theta-e^{\theta}\sin\theta, e^{\theta}\sin\theta+e^{\theta}\cos\theta, 0\}.$$

$$\cos(\widehat{r,r'})=\frac{r\cdot r'}{|r'||r|}=\frac{e^{\theta}\{\cos\theta,\sin\theta,0\}\cdot e^{\theta}\{\cos\theta-\sin\theta,\sin\theta+\cos\theta,0\}}{e^{\theta}\sqrt{2}e^{\theta}}$$

$$=\frac{e^{2\theta}}{\sqrt{2}e^{2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$\therefore\ (\widehat{r,r'})=$ 定值.

7　根据条件：$(r(t)-\overrightarrow{OA})\cdot r'(t)=0, r'(t)\neq \mathbf{0}$，则

$$(r(t)-\overrightarrow{OA})\cdot(r(t)-\overrightarrow{OA})'=0.$$

两边积分，得

$$\frac{1}{2}(r(t)-\overrightarrow{OA})^2=\frac{1}{2}R^2,\qquad (r(t)-\overrightarrow{OA})^2=R^2,$$

故 $r(t)$ 是在以 A 为中心，半径为 R 的球面上.

8　证明：(C) 的切向量 $r'(t)=\{2,2\sqrt{3}t,3t^2\}$，直线的切向量 $s=\{1,0,1\}$，

$$\cos(\widehat{r,s})=\frac{\{2,2\sqrt{3}t,3t^2\}\cdot\{1,0,1\}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(2+3t^2)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\therefore\ (\widehat{r,s})=\frac{\pi}{4}.$

9　由于 $r'(t)=\{e^t\cos t-e^t\sin t, e^t\sin t+e^t\cos t, e^t\}$，在 $t=0$ 点的向径与切向量为

$$r(0)=\{1,0,1\},$$
$$r'(0)=\{1,1,1\}.$$

所以，(C) 的切线方程为

$$X-1=Y-0=Z-1,\text{即 } X=Y+1=Z.$$

10 曲线(C)的方程为：

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

则其在 P 点处的切线方程为：

$$\begin{cases} F_x|_P(x-x_0)+F_y|_P(y-y_0)+F_z|_P(z-z_0)=0, \\ G_x|_P(x-x_0)+G_y|_P(y-y_0)+G_z|_P(z-z_0)=0. \end{cases}$$

即
$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_P}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_P}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_P}.$$

法面的方程为

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_P(x-x_0)+\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_P(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_P(z-z_0)=0.$$

11 曲线(C)的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y^2+z^2=1, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2-1=0, \\ G(x,y,z)=y^2+z^2-1=0. \end{cases}$$

$$F_x=2x,F_y=2y,F_z=0,$$
$$G_x=0,G_y=2y,G_z=2z.$$

所以法面的方程为

$$\begin{vmatrix} 2y_0 & 0 \\ 2y_0 & 2z_0 \end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix} 0 & 2x_0 \\ 2z_0 & 0 \end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ 0 & 2y_0 \end{vmatrix}(z-z_0)=0,$$

$$4y_0z_0(x-x_0)-4x_0z_0(y-y_0)+4x_0y_0(z-z_0)=0,$$

即
$$\frac{x-x_0}{x_0}-\frac{y-y_0}{y_0}+\frac{z-z_0}{z_0}=0,$$

即
$$\frac{x}{x_0}-\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}=1.$$

12 $\boldsymbol{r}=\{t,a\cosh\frac{t}{a},0\}$,

$$\boldsymbol{r}'=\{1,\sinh\frac{t}{a},0\},|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{1+\sinh^2\frac{t}{a}}=\cosh\frac{t}{a}.$$

∴ 从 $t=0$ 算起的弧长为:

$$l(t)=\int_0^t |\boldsymbol{r}'|\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^t \cosh\frac{t}{a}\mathrm{d}t$$
$$=a\int_0^{\frac{t}{a}}\cosh u\mathrm{d}u$$
$$=a\sinh\frac{t}{a}.$$

13 ∵ 曲线(C)的方程为 $y=bx^2$,它的向量参数表示为:

$$\boldsymbol{r}=\{x,bx^2,0\},$$
$$\boldsymbol{r}'=\{1,2bx,0\},|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{1+4b^2x^2}.$$

对应于 $-a\leqslant x\leqslant a$ 一段的弧长为:

$$l(x)=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+4b^2x^2}\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^a\sqrt{1+4b^2x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{b}\int_0^{2ab}\sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{b}\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]_0^{2ab}.$$
$$=a\sqrt{1+4a^2b^2}+\frac{1}{2b}\ln\left(2ab+\sqrt{1+4a^2b^2}\right).$$

14 $\boldsymbol{r}=\{a\cos^3 t,a\sin^3 t,0\},$

$\boldsymbol{r}'=\{-3a\cos^2 t\sin t,3a\sin^2 t\cos t,0\},$

$|\boldsymbol{r}'|=|3a\sin t\cos t|=3a|\sin t\cos t|.$

$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ 一段的弧长为:

$$l(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t\mathrm{d}t$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \mathrm{d}(\sin t)$$

$$= \frac{3}{2}a\sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}a.$$

15 $\boldsymbol{r} = \{a(t - \sin t), a(1 - \cos t), 0\}, a > 0,$

$$\boldsymbol{r}' = \{a(1 - \cos t), a\sin t, 0\},$$

$$|\boldsymbol{r}'| = \sqrt{[a(1 - \cos t)]^2 + (a\sin t)^2}$$

$$= 2a\left|\sin \frac{t}{2}\right|.$$

对应 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 一段的弧长为：

$$l = \int_0^{2\pi} 2a\left|\sin \frac{t}{2}\right| \mathrm{d}t$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \sin u \mathrm{d}u$$

$$= 8a.$$

16 曲线与 xOy 平面相交时，$z = 0$，即 $4at = 0$，得 $t = 0$.

$$\boldsymbol{r} = \{3a\cos t, 3a\sin t, 4at\},$$

$$\boldsymbol{r}' = \{-3a\sin t, 3a\cos t, 4a\},$$

$$|\boldsymbol{r}'| = \sqrt{9a^2 + 16a^2} = 5a.$$

所以，弧长

$$l(t) = \int_0^t 5a\mathrm{d}t = 5at.$$

17 曲线与两平面交点的横坐标分别为 $x = a, x = 3a$. 取 x 为参数，曲线的方程为

$$\boldsymbol{r} = \left\{x, \frac{x^3}{3a^2}, \frac{a^2}{2x}\right\},$$

$$\boldsymbol{r}'_x = \left\{1, \frac{x^2}{a^2}, -\frac{a^2}{2x^2}\right\},$$

$$|\boldsymbol{r}'| = \frac{\sqrt{(2a^2x^2)^2 + (2x^4)^2 + (a^4)^2}}{2a^2x^2} = \frac{2x^4 + a^4}{2a^2x^2}.$$

所以 $\quad l = \int_a^{3a} \frac{2x^4 + a^4}{2a^2x^2} \mathrm{d}x$

$$= \int_a^{3a} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{2x^2} \right) \mathrm{d}x = 9a.$$

18 由于 $\boldsymbol{r} = \{a\cosh t, a\sinh t, at\}$，

所以 $\boldsymbol{r}' = \{a\sinh t, a\cosh t, a\}$，

$|\boldsymbol{r}'| = \sqrt{a^2\sinh^2 t + a^2\cosh^2 t + a^2} = \sqrt{2}a\cosh t$，

$$l(t) = \int_0^t \sqrt{2}a\cosh t\mathrm{d}t = \sqrt{2}a\sinh t.$$

19 由于 $\boldsymbol{r} = \left\{2a\left(\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}\right), 2at^2, 4at\right\}$，所以

$\boldsymbol{r}' = \left\{4a\sqrt{1-t^2}, 4at, 4a\right\}$，

$|\boldsymbol{r}'| = 4a\sqrt{1-t^2+t^2+1} = 4\sqrt{2}a.$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} 4\sqrt{2}a\mathrm{d}t = 4\sqrt{2}a(t_2 - t_1).$$

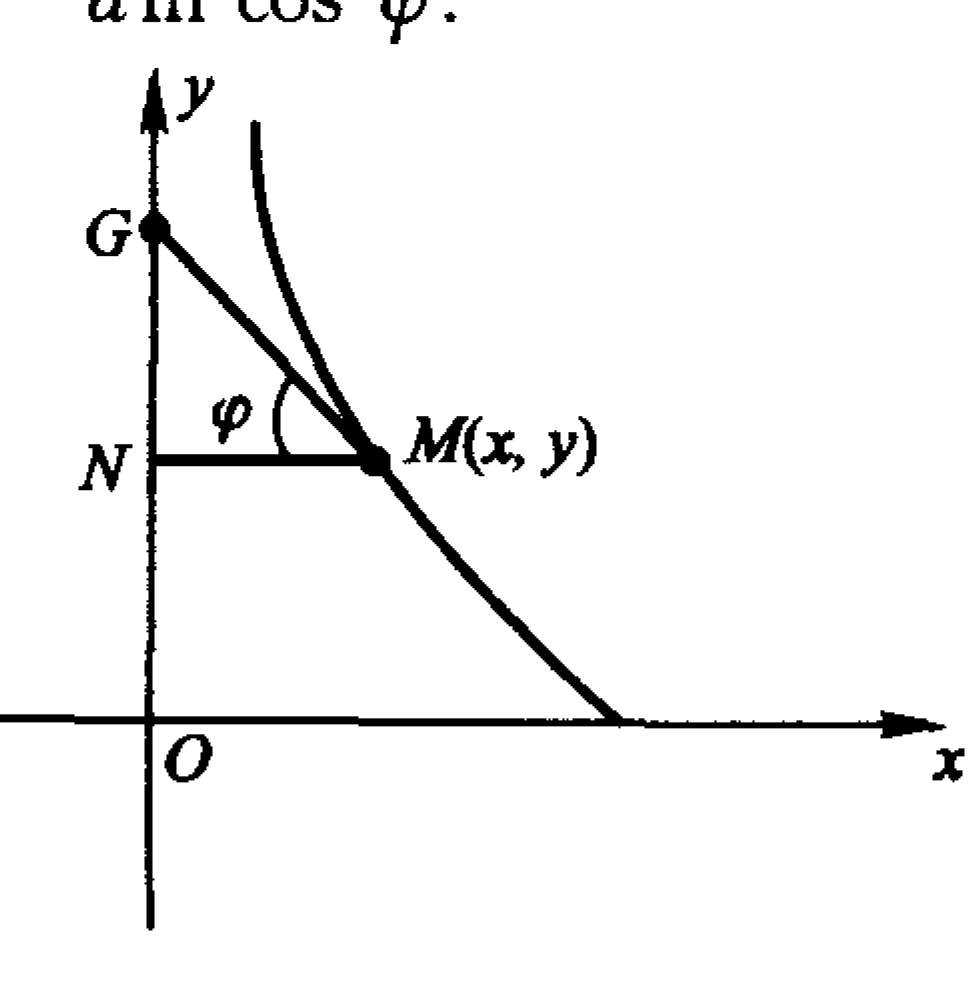
20 $\boldsymbol{r} = \{a\cos\varphi, a\ln(\sec\varphi + \tan\varphi) - a\sin\varphi, 0\} \quad (a>0)$，

$\boldsymbol{r}' = \{-a\sin\varphi, a\sec\varphi - a\cos\varphi, 0\}$，

$|\boldsymbol{r}'| = \sqrt{a^2(\sin^2\varphi + \sec^2\varphi + \cos^2\varphi - 2)} = a\tan\varphi$，

$$l(\varphi) = \int_0^\varphi a\tan\varphi\mathrm{d}\varphi = -a\ln\cos\varphi.$$

设切点为 M，切线与 y 轴的交点为 G，过 M 作 x 轴的平行线交 y 轴于 N（题 20 图），则 $NM = x$，$NG = x\tan\varphi$，于是有



题 20 图

$|MG| = \sqrt{x^2 + (x\tan\varphi)^2}$

$= \sqrt{x^2 \cdot (1 + \tan^2\varphi)}$

$= \sqrt{a^2\cos^2\varphi(1 + \tan^2\varphi)}$

$$=\sqrt{a^2\cos^2\varphi\cdot\sec^2\varphi}=a.$$

21 $\boldsymbol{r}=\{\cos^3 t,\sin^3 t,\cos 2t\}$,

$$\boldsymbol{r}'=\{-3\cos^2 t\sin t,+3\sin^2 t\cos t,-2\sin 2t\},$$

$$|\boldsymbol{r}'|=5|\sin t\cos t|=\frac{5}{2}|\sin 2t|.$$

当 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 时,动点不重复地画出一条封闭曲线,所以

$$l=\frac{5}{2}\int_0^{2\pi}|\sin 2t|\,\mathrm{d}t=\frac{5}{4}\int_0^{2\pi}|\sin 2t|\,\mathrm{d}(2t)$$

$$=\frac{5}{4}\int_0^{4\pi}|\sin u|\,\mathrm{d}u=10.$$

22 在方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

中令 $x=x$,解出 $y=y(x),z=z(x)$,则曲线的方程可表示为:

$$\boldsymbol{r}=\{x,y(x),z(x)\}.$$

$$\boldsymbol{r}'=\{1,y'(x),z'(x)\}.$$

$$|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)},$$

所以

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

23 从方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\x^2+y^2=b^2\end{cases}$$

解出 $$y=\pm\sqrt{b^2-x^2},z=\pm\sqrt{a^2-b^2},$$

进一步将其参数化,令 $x=b\cos\varphi$,则 $y=b\sin\varphi$.

曲线是两条平面曲线,方程为:

$$\boldsymbol{r}=\left\{b\cos\varphi,b\sin\varphi,\pm\sqrt{a^2-b^2}\right\},$$

$$\boldsymbol{r}'=\{-b\sin\varphi,b\cos\varphi,0\},$$

$$|\boldsymbol{r}'|=b.$$

一条曲线的弧长为：

$$l = \int_0^{2\pi} b\,\mathrm{d}\theta = 2b\pi,$$

两条曲线的全长为 $4b\pi$.

24
$$\boldsymbol{r} = \{a\cos t, a\sin t, bt\},$$
$$\boldsymbol{r}' = \{-a\sin t, a\cos t, b\},$$
$$|\boldsymbol{r}'| = \sqrt{a^2+b^2},$$
$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+b^2}\,t,$$

则 $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$,代入原方程,得

$$\boldsymbol{r} = \left\{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}.$$

25 由第 18 题的结果

$$s(t) = a\sqrt{2}\sinh t, t = \operatorname{arsh}\frac{s}{\sqrt{2}a}, \cosh t = \sqrt{1+\frac{s^2}{2a^2}}.$$

代入曲线的方程,得

$$\boldsymbol{r} = \left\{a\sqrt{1+\frac{s^2}{2a^2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, a\operatorname{arsh}\frac{s}{\sqrt{2}a}\right\}.$$

26
$$\boldsymbol{r} = \{\mathrm{e}^t\cos t, \mathrm{e}^t\sin t, \mathrm{e}^t\},$$
$$\boldsymbol{r}' = \{\mathrm{e}^t\cos t - \mathrm{e}^t\sin t, \mathrm{e}^t\sin t + \mathrm{e}^t\cos t, \mathrm{e}^t\}.$$
$$|\boldsymbol{r}'| = \sqrt{3}\mathrm{e}^t.$$

$$\therefore \quad s(t) = \int_0^t \sqrt{3}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}(\mathrm{e}^t - 1),$$

$$t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right).$$

代入原方程,得

$$\boldsymbol{r} = \left\{\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\cos\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right), \left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\sin\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right), \frac{s}{\sqrt{3}}+1\right\}.$$

27 由于 $x=x(\theta)=\rho(\theta)\cos\theta,$

$y=y(\theta)=\rho(\theta)\sin\theta.$

所以 $\boldsymbol{r}=\{\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta\},$

$\boldsymbol{r}'=\{\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta,\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta\},$

$$|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)^2+(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)^2}$$

$$=\sqrt{(\rho')^2+\rho^2}.$$

$$\therefore\quad l(\theta)=\int_{\theta_0}^{\theta}|\boldsymbol{r}'|\,\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{(\rho')^2+\rho^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

28 由于 $x=x(t)=\rho(t)\cos\varphi(t),$

$y=y(t)=\rho(t)\sin\varphi(t),$

$z=z(t).$

所以 $\boldsymbol{r}=\{\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z\},$

$\boldsymbol{r}'=\{\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi\cdot\varphi',\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi\cdot\varphi',z'\},$

$$|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi\cdot\varphi')^2+(\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi\cdot\varphi')^2+z'^2}$$

$$=\sqrt{\rho'^2+\rho^2\varphi'^2+z'^2},$$

$$l(t)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\rho'^2+\rho^2\varphi'^2+z'^2}\,\mathrm{d}t.$$

29 由于曲线的方程为

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\cos\varphi,\\y=\rho\cos\theta\sin\varphi,\\z=\rho\sin\theta,\end{cases}$$

所以

$\boldsymbol{r}=\{\rho\cos\theta\cos\varphi,\rho\cos\theta\sin\varphi,\rho\sin\theta\}$

$\boldsymbol{r}'=\{\rho'\cos\theta\cos\varphi-\rho\sin\theta\cdot\theta'\cos\varphi-\rho\cos\theta\sin\varphi\cdot\varphi',$

$\rho'\cos\theta\sin\varphi-\rho\sin\theta\cdot\theta'\sin\varphi+\rho\cos\theta\cos\varphi\cdot\varphi',$

$\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta\cdot\theta'\},$

$$|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{\rho'^2+\rho^2(\theta'^2+\cos^2\theta\cdot\varphi'^2)},$$

$$l(t)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\rho'^2+\rho^2(\theta'^2+\cos^2\theta\cdot\varphi'^2)}\,\mathrm{d}t.$$

30 依题意 $\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{a}=0$,有

$$(\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{a})'=0,\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{a}=\text{常数}.$$

但 $\boldsymbol{r}(0)\cdot\boldsymbol{a}=0$,得 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{a}=0$,即 $\boldsymbol{r}(t)$与 $\boldsymbol{a}$ 垂直.

习题 1.3

1 解:$\boldsymbol{r}(t)=\{a\cos t,a\sin t,bt\}$,

$\boldsymbol{r}'(t)=\{-a\sin t,a\cos t,b\}$,

$\boldsymbol{r}''(t)=\{-a\cos t,-a\sin t,0\}$,

密切平面的方程为:

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')=0,$$

即

$$\begin{vmatrix} X-a\cos t & Y-a\sin t & Z-bt \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}=0.$$

展开整理得:

$$X\sin t-Y\cos t+\frac{a}{b}Z-at=0.$$

2 解:$\boldsymbol{r}=\{t\sin t,t\cos t,te^t\}$,

$\boldsymbol{r}'(t)=\{t\cos t+\sin t,\cos t-t\sin t,e^t+te^t\}$,

$\boldsymbol{r}''(t)=\{2\cos t-t\sin t,-2\sin t-t\cos t,2e^t+te^t\}$.

在原点处 $t=0$,

$$\boldsymbol{r}(0)=\{0,0,0\},$$
$$\boldsymbol{r}'(0)=\{0,1,1\},$$
$$\boldsymbol{r}''(0)=\{2,0,2\}.$$

在原点处切平面的方程为:

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}'_0,\boldsymbol{r}''_0)=0.$$

即

$$X+Y-Z=0.$$

法平面的方程为：

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{r}'_0=0,$$

即

$$Y+Z=0.$$

从切平面的方程为：

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}'_0\times\boldsymbol{r}''_0,\boldsymbol{r}'_0)=0,\boldsymbol{r}'_0\times\boldsymbol{r}''_0=\{1,1,-1\},$$

即

$$2X-Y+Z=0.$$

切线方程为：

$$\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_0=\lambda\boldsymbol{r}'_0,$$

即

$$\frac{X}{0}=\frac{Y}{1}=\frac{Z}{1}.$$

主法线方程为：

$$\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_0=\lambda[(\boldsymbol{r}'_0\times\boldsymbol{r}''_0)\times\boldsymbol{r}'_0],$$

由于

$$(\boldsymbol{r}'_0\times\boldsymbol{r}''_0)\times\boldsymbol{r}'_0=\{2,-1,1\},$$

主法线方程为：

$$\frac{X}{2}=\frac{Y}{-1}=\frac{Z}{1}.$$

副法线方程为

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_0)=\lambda(\boldsymbol{r}'_0\times\boldsymbol{r}''_0),$$

即

$$\frac{X}{1}=\frac{Y}{1}=\frac{Z}{-1}.$$

3 $\boldsymbol{r}=\{a\cos t,a\sin t,bt\},$

$\boldsymbol{r}'=\{-a\sin t,a\cos t,b\},$

$\boldsymbol{r}''=\{-a\cos t,-a\sin t,0\},$

$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=\{ab\sin t,-ab\cos t,a^2\},$

$(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\times\boldsymbol{r}'=\{-(ab^2+a^3)\cos t,-(a^3+ab^2)\sin t,0\},$

$|(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\times\boldsymbol{r}'|=ab^2+a^3,$

$\boldsymbol{\beta}=\dfrac{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\times\boldsymbol{r}'}{|(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\times\boldsymbol{r}'|}=\{-\cos t,-\sin t,0\},$

主法线的方程为：

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})=\lambda\boldsymbol{\beta},$$

即
$$\frac{X-a\cos t}{-\cos t}=\frac{Y-a\sin t}{-\sin t}=\frac{Z-bt}{0}.$$

又 z 轴的方程为：

$$\frac{X}{0}=\frac{Y}{0}=\frac{Z}{1},$$

对任意 t，有

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{e}_3=-\cos t\cdot 0+(-\sin t)\cdot 0+0\cdot 1=0,$$

即主法线与 z 轴垂直.又由于点 $(0,0,bt)$ 即在主法线上，又在 z 轴上，故主法线与 z 轴垂直相交于 $(0,0,bt)$.

4 解：$\boldsymbol{r}=\{\cos\alpha\cos t,\cos\alpha\sin t,t\sin\alpha\}$,

$\boldsymbol{r}'=\{-\cos\alpha\sin t,\cos\alpha\cos t,\sin\alpha\}$,

$\boldsymbol{r}''=\{-\cos\alpha\cos t,-\cos\alpha\sin t,0\}$,

$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=\{\sin\alpha\cos\alpha\sin t,-\sin\alpha\cos\alpha\cos t,\cos^2\alpha\}$,

$|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|=\cos\alpha$,

所以 $\quad\boldsymbol{\gamma}=\{\sin\alpha\sin t,-\sin\alpha\cos t,\cos\alpha\}$.

新曲线的方程为：

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{r}}&=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\gamma}\\&=\{\cos\alpha\cos t+\sin\alpha\sin t,\cos\alpha\sin t-\sin\alpha\cos t,\\&\qquad t\sin\alpha+\cos\alpha\}\\&=\{\cos(t-\alpha),\sin(t-\alpha),t\sin\alpha+\cos\alpha\},\end{aligned}$$

$$\tilde{\boldsymbol{r}}'=\{-\sin(t-\alpha),\cos(t-\alpha),\sin\alpha\},$$

$$\tilde{\boldsymbol{r}}''=\{-\cos(t-\alpha),-\sin(t-\alpha),0\},$$

新曲线密切平面的方程为

$$\begin{vmatrix}X-\cos(t-\alpha) & Y-\sin(t-\alpha) & Z-(t\sin\alpha+\cos\alpha)\\ -\sin(t-\alpha) & \cos(t-\alpha) & \sin\alpha\\ -\cos(t-\alpha) & -\sin(t-\alpha) & 0\end{vmatrix}=0.$$

展开整理得

$$[\sin\alpha\sin(t-\alpha)]X-[\sin\alpha\cos(t-\alpha)]Y+$$
$$Z-(t\sin\alpha+\cos\alpha)=0.$$

5 证明：设球面的半径为 R，球心在原点，球面曲线的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),$$
$$\boldsymbol{r}^2=R^2,$$

则
$$\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0.$$

曲线的法平面方程为

$$[\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s)]\cdot\dot{\boldsymbol{r}}(s)=0,$$

即

$$\boldsymbol{\rho}(s)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}(s)=0.$$

它通过原点，即通过球心.

6 证明：因为$\boldsymbol{r}=\{a\cos t,a\sin t,bt\}$,

$$\boldsymbol{r}'=\{-a\sin t,a\cos t,b\},$$
$$\boldsymbol{r}''=\{-a\cos t,-a\sin t,0\},$$
$$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=\{ab\sin t,-ab\cos t,a^2\}.$$

所以副法线的方向向量为$\{b\sin t,-b\cos t,a\}$，过原点且平行于副法线的直线方程为

$$\frac{x}{b\sin t}=\frac{y}{-b\cos t}=\frac{z}{a}.$$

消去 t：

$$x=\lambda b\sin t,y=-\lambda b\cos t,z=a\lambda,$$
$$x^2+y^2=b^2\lambda^2,z^2=a^2\lambda^2,$$

即得
$$a^2(x^2+y^2)=b^2z^2.$$

7 (1) 因为$\boldsymbol{r}=\{a\cosh t,a\sinh t,at\}$,

$$\boldsymbol{r}'=\{a\sinh t,a\cosh t,a\},$$
$$\boldsymbol{r}''=\{a\cosh t,a\sinh t,0\},$$
$$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=\{-a^2\sinh t,a^2\cosh t,-a^2\},$$

$$|\boldsymbol{r}'| = \sqrt{2}a\cosh t,$$

$$|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''| = \sqrt{2}a^2\cosh t,$$

$$\boldsymbol{r}''' = \{a\sinh t, a\cosh t, 0\},$$

$$(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''') = a^3,$$

所以
$$k = \frac{1}{2a\cosh^2 t}, \tau = \frac{1}{2a\cosh^2 t}.$$

(2) 因为 $\boldsymbol{r} = \{a(3t - t^3), 3at^2, a(3t + t^3)\}$,

$$\boldsymbol{r}' = \{3a(1 - t^2), 6at, 3a(1 + t^2)\},$$

$$\boldsymbol{r}'' = \{-6at, 6a, 6at\},$$

$$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'' = \{18a^2(t^2 - 1), -36a^2t, 18a^2(t^2 + 1)\},$$

$$|\boldsymbol{r}'| = 3\sqrt{2}a(1 + t^2),$$

$$|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''| = 18\sqrt{2}a^2(1 + t^2),$$

$$\boldsymbol{r}''' = \{-6a, 0, 6a\},$$

$$(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''') = 216a^3,$$

所以

$$k = \frac{1}{3a(1 + t^2)^2}, \tau = \frac{1}{3a(1 + t^2)^2}.$$

8 **解:** 因为 $\boldsymbol{r} = \{\cos^3 t, \sin^3 t, \cos^2 t\}$,

$$\boldsymbol{r}' = \{-3\cos t, 3\sin t, -2\}\sin t\cos t,$$

$$\boldsymbol{r}'' = \{3\cos t(3\sin^2 t - 1), 3\sin t(3\cos^2 t - 1), -4\cos 2t\},$$

$$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'' = \sin^2 2t\left\{\cos t, -\sin t, -\frac{3}{4}\right\},$$

$$|\boldsymbol{r}'| = 5|\sin t\cos t|,$$

$$|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''| = \frac{15}{4}\sin^2 2t = 15\sin^2 t + \cos^2 t,$$

$$\boldsymbol{r}''' = \{3\sin t(9\cos^2 t - 2), 3\cos t(2 - 9\sin^2 t), 8\sin 2t\},$$

$$(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''') = 36\sin^3 t\cos^3 t.$$

所以,曲率 k,挠率 τ 分别为

$$k = \frac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{15\sin^2 t + \cos^2 t}{(5|\sin t\cos t|)^3} = \frac{3}{25|\sin t\cos t|},$$

$$\tau = \frac{(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|^2} = \frac{36\sin^3 t\cos^3 t}{(15\sin^2 t\cos^2 t)^2} = \frac{4}{25\sin t\cos t},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|} = \frac{\sin t\cos t}{5|\sin t\cos t|}\{-3\cos t, 3\sin t, -4\}$$

$$= \frac{\sin t\cos t}{|\sin t\cos t|}\left\{-\frac{3}{5}\cos t, \frac{3}{5}\sin t, -\frac{4}{5}\right\},$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|} = \frac{3\sin^2 2t}{\frac{15}{4}\sin^2 2t}\left\{\cos t, -\sin t, -\frac{3}{4}\right\}$$

$$= \left\{\frac{4}{5}\cos t, -\frac{4}{5}\sin t, -\frac{3}{5}\right\},$$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha} = \frac{\sin t\cos t}{|\sin t\cos t|}\{\sin t, \cos t, 0\}.$$

根据 $\sin t$, $\cos t$ 的周期性,所有讨论只考虑 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 即可. 当 $t=0$、$\frac{\pi}{2}$、π、$\frac{3}{2}\pi$、2π 时,在对应点 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{0}$,即这些点是曲线的非正常点.

(1) 当 $0<t<\frac{\pi}{2}$, $\pi<t<\frac{3}{2}\pi$ 时,

$$|\sin t\cos t| = \sin t\cos t.$$

这时

$$\boldsymbol{\alpha} = \left\{-\frac{3}{5}\cos t, \frac{3}{5}\sin t, -\frac{4}{5}\right\},$$

$$\boldsymbol{\beta} = \{\sin t, \cos t, 0\},$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \left\{\frac{4}{5}\cos t, -\frac{4}{5}\sin t, -\frac{3}{5}\right\}.$$

(2) 当 $\frac{\pi}{2}<t<\pi$, $\frac{3}{2}\pi<t<2\pi$ 时.

$$|\sin t\cos t| = -\sin t\cos t,$$

这时

$$\boldsymbol{\alpha} = -\left\{-\frac{3}{5}\cos t, \frac{3}{5}\sin t - \frac{4}{5}\right\} = \left\{\frac{3}{5}\cos t, -\frac{3}{5}\sin t, \frac{4}{5}\right\},$$

$$\boldsymbol{\beta}=-\{\sin t,\cos t,0\}=\{-\sin t,-\cos t,0\},$$

$$\boldsymbol{\gamma}=\left\{\frac{4}{5}\cos t,-\frac{4}{5}\sin t,0\right\}.$$

下面验证伏雷内公式：

由于 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\boldsymbol{r}'|=5|\sin t\cos t|$，当 $0<t<\frac{\pi}{2}$、$\pi<t<\frac{3}{2}\pi$ 时，由于

$$|\sin t\cos t|=\sin t\cos t,$$

(1)
$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}s}=\frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{|\boldsymbol{r}'|}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{1}{5|\sin t\cos t|}\left\{\frac{3}{5}\sin t,\frac{3}{5}\cos t,0\right\},$$

$$=\left\{\frac{3}{25\cos t},\frac{3}{25\sin t},0\right\},$$

$$k\boldsymbol{\beta}=\frac{3}{25|\sin t\cos t|}\{\sin t,\cos t,0\}$$

$$=\left\{\frac{3}{25\cos t},\frac{3}{25\sin t},0\right\},$$

即
$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}=k\boldsymbol{\beta}.$$

(2)
$$\dot{\boldsymbol{\beta}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s}=\frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{|\boldsymbol{r}'|}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{1}{5|\sin t\cos t|}\{\cos t,-\sin t,0\}$$

$$=\left\{\frac{1}{5\sin t},-\frac{1}{5\cos t},0\right\},$$

$$-k\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma}=-\frac{3}{25|\sin t\cos t|}\left\{-\frac{3}{5}\cos t,\frac{3}{5}\sin t,-\frac{4}{5}\right\}+$$

$$\frac{4}{25\sin t\cos t}\left\{\frac{4}{5}\cos t,-\frac{4}{5}\sin t,-\frac{3}{5}\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{5\sin t},-\frac{1}{5\cos t},0\right\},$$

即 $$\dot{\boldsymbol{\beta}}=-k\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma}.$$

(3) $$\dot{\boldsymbol{\gamma}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}s}=-\frac{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{|\boldsymbol{r}'|}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{1}{|5\sin t\cos t|}\left\{-\frac{4}{5}\sin t,-\frac{4}{5}\cos t,0\right\}$$

$$=\left\{-\frac{4}{25\cos t},-\frac{4}{25\sin t},0\right\}.$$

$$-\tau\boldsymbol{\beta}=-\frac{4}{25\sin t\cos t}\{\sin t,\cos t,0\}$$

$$=\left\{-\frac{4}{25\cos t},-\frac{4}{25\sin t},0\right\},$$

即 $\dot{\boldsymbol{\gamma}}=-\tau\boldsymbol{\beta}.$

对于$\frac{\pi}{2}<t<\pi,\frac{3}{2}\pi<t<2\pi$时,完全可以按上述方法验证.

9 证法一,设所给曲线为$(C):\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,定点的向径为$\boldsymbol{R}_0$,则

$$\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{R}_0=\lambda(s)\boldsymbol{\alpha}(s),$$

$$\boldsymbol{\alpha}(s)=\dot{\lambda}(s)\boldsymbol{\alpha}+\lambda k\boldsymbol{\beta}.$$

但$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性无关,从而

$$\dot{\lambda}=1,\lambda k=0,$$

又$\lambda\neq0$,所以$k=0$,即(C)是直线.

证法二 根据已知,有

$$[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{R}_0]\times\boldsymbol{\alpha}(s)=\boldsymbol{0},$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\boldsymbol{\alpha}+[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{R}_0]\times k\boldsymbol{\beta}=0,$$

$$[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{R}_0]\times k\boldsymbol{\beta}=0,$$

但

$$[\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{R}_0]\times\boldsymbol{\beta}\neq0.$$

(否则，$(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{R}_0)\,/\!/\,\boldsymbol{\beta}$，由已知得出 $(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{R}_0)\,/\!/\,\boldsymbol{\alpha}$，于是 $(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{R}_0)\equiv 0$，即 $\boldsymbol{r}(s)\equiv\boldsymbol{R}_0$，从而所给的曲线退缩为一点，得出矛盾)，所以

$$k\equiv 0$$

即曲线(C)是直线.

证法三　设所给曲线为(C)：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，则由已知有

$$\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{R}_0=\lambda(t)\boldsymbol{r}'(t),$$

$$\boldsymbol{r}'(t)=\lambda'(t)\boldsymbol{r}'(t)+\lambda(t)\boldsymbol{r}''(t).$$

于是　$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=0$，所以

$$k=\frac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}=0,$$

即曲线(C)是直线.

10　证法一　设曲线(C)：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，定点向径为 $\boldsymbol{R}_0$，据已知条件$(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{R}_0)$在密切平面上，故

$$(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')=0. \qquad (*)$$

(1) 若 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''$有两个共线，则分别有下列结果：

① 若$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0)\,/\!/\,\boldsymbol{r}'$则据上题结论，$(C)$是直线；

② 或 $\boldsymbol{r}'\,/\!/\,\boldsymbol{r}''$，则 $\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=0$　$\therefore k=0$，曲线(C)是直线；

③ 若$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0)\,/\!/\,\boldsymbol{r}''$，设 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0=\lambda(t)\boldsymbol{r}''$，两边对 t 求微商：

$$\boldsymbol{r}'=\lambda'(t)\boldsymbol{r}''+\lambda(t)\boldsymbol{r}''',$$

即　$\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}'''$共面. 故$(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')=0$. 故

$$\tau=\frac{(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|^2}=0,$$

则(C)是平面曲线.

(2) 若 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''$两两不共线，则在$(*)$式两边对 t 求微商：

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')'=0,$$

即　$(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}'')+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''')=0.$

但前两项为0,所以

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''')=0.$$

由于上式与(*)式同时成立,所以 $\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}'''$共面,即

$$(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')=0.$$

$$\tau=\frac{(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|^2}=0,$$

故曲线(C)是平面曲线.

证法二 设曲线(C):$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,依已知条件

$$(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{R}_0)\cdot\boldsymbol{\gamma}(s)=0, \qquad (**)$$

两边对 s 求微商:

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0)\cdot(-\tau\boldsymbol{\beta})=0,$$

所以

$$\tau(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0)\cdot\boldsymbol{\beta}=0.$$

(1) 若 $\tau=0$,则(C)是平面曲线;

(2) 若$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0)\cdot\boldsymbol{\beta}=0$,两边对 s 求微商:

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0)\cdot(-k\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma})=0,$$

所以

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0)\cdot(-k\boldsymbol{\alpha})+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0)\cdot\tau\boldsymbol{\gamma}=0.$$

根据已知条件(* *)式,后一项为0,所以

$$k(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0)\cdot\boldsymbol{\alpha}=0.$$

但由所设$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0)\perp\boldsymbol{\beta}$,$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0)\perp\boldsymbol{\gamma}$,所以

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0)/\!/\boldsymbol{\alpha},$$

故$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_0)\cdot\boldsymbol{\alpha}\neq0$,从而 $k=0$,曲线(C)是直线.

11 例题中已给出解答.

12 证明:设曲线(C):$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$的曲率 $k=\text{cons } t\neq0$,则其曲率中心的轨迹为

$$(C^*):\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+\frac{1}{k}\boldsymbol{\beta}(s).$$

上式两边对曲线(C^*)的自然参数 s^* 求微商,得

$$\dot{\boldsymbol{r}}^*=\left[\dot{\boldsymbol{r}}(s)+\frac{1}{k}\dot{\boldsymbol{\beta}}(s)\right]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s^*},$$

于是有

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \left[\boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{k}(-k\boldsymbol{\alpha} + \tau\boldsymbol{\gamma})\right]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s^*} = \frac{1}{k}\tau\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s^*}\boldsymbol{\gamma},$$

即 $\boldsymbol{\alpha}^* /\!/ \boldsymbol{\gamma}$,并且

$$\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s^*}\right| = \frac{k}{|\tau|}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}^* /\!/ \boldsymbol{\gamma}$,从而 $\boldsymbol{\alpha}^* = \pm\boldsymbol{\gamma}$,上式两边对 s^* 求导,得

$$k^*\boldsymbol{\beta}^* = \pm\tau\boldsymbol{\beta}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s^*}.$$

所以

$$k^* = |\tau|\cdot\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s^*}\right| = |\tau|\cdot\frac{k}{|\tau|} = k.$$

13 证明:因为 $\boldsymbol{r} = \{1+3t+2t^2, 2-2t+5t^2, 1-t^2\}$,

$$\boldsymbol{r}' = \{3+4t, -2+10t, -2t\},$$
$$\boldsymbol{r}'' = \{4, 10, -2\},$$
$$\boldsymbol{r}''' = \boldsymbol{0}.$$

从而 $\tau = 0$,即曲线是平面曲线.令 $t=0$,则得

$$\boldsymbol{r}(0) = \{1,2,1\},$$
$$\boldsymbol{r}'(0) = \{3,-2,0\}.$$

作为平面曲线,它所在的平面即是它的密切平面,其方程为

$$\begin{vmatrix} x-1, & y-2 & z-1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 10 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

即 $$2x+3y+19z-27=0.$$

14 证法一 设曲线 $\Gamma: \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1(s_1), \Gamma_2: \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2(s_2)$.因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 /\!/ \boldsymbol{\alpha}_2$,从而 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \pm\boldsymbol{\alpha}_2$,于是

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \pm\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_2}{\mathrm{d}s_2}\cdot\frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}s_1},$$

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 = \pm k_2\boldsymbol{\beta}_2\frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}s_1}.$$

因此，$\boldsymbol{\beta}_1 /\!/ \boldsymbol{\beta}_2$. 即 Γ_1，Γ_2在对应点的主法线平行. 又 $\boldsymbol{\alpha}_1 /\!/ \boldsymbol{\alpha}_2$，所以 $\boldsymbol{\gamma}_1 /\!/ \boldsymbol{\gamma}_2$，即 Γ_1、Γ_2在对应点处的副法线平行.

证法二　因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 \times \boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$，所以

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1 \times \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_1 \times \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 \frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}s_1} = \mathbf{0},$$

于是有

$$k_1 \boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_1 \times k_2 \boldsymbol{\beta}_2 \frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}s_1} = \mathbf{0}.$$

从而 $\pm k_1 \boldsymbol{\beta}_1 \times \boldsymbol{\alpha}_1 \pm \boldsymbol{\alpha}_2 \times \boldsymbol{\beta}_2 \frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}s_1} = \mathbf{0}$　（根据 $\boldsymbol{\alpha}_2 = \pm \boldsymbol{\alpha}_1$）.

$$\mp k_1 \boldsymbol{\gamma}_1 \pm \boldsymbol{\gamma}_2 \left(k_2 \frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}s_1} \right) = \mathbf{0}.$$

因此 $\boldsymbol{\gamma}_1 /\!/ \boldsymbol{\gamma}_2$，又由于 $\boldsymbol{\alpha}_1 /\!/ \boldsymbol{\alpha}_2$，所以 $\boldsymbol{\beta}_1 /\!/ \boldsymbol{\beta}_2$.

15　证明：因为 $\boldsymbol{\beta}_1 /\!/ \boldsymbol{\beta}_2$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1 \perp \boldsymbol{\beta}_2$. 从而

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2)}{\mathrm{d}s_1} &= \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 \frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}s_1} \right) \\ &= k_1 \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot k_2 \boldsymbol{\beta}_2 \frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}s_1} \\ &= 0,\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2$为常数，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$与 $\boldsymbol{\alpha}_2$作固定角.

16　证明：设曲线 $\Gamma: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$，曲线 $\overline{\Gamma}: \boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}^*(s^*)$. Γ 在 $\boldsymbol{r}(s)$的主法线与 $\overline{\Gamma}$ 在 $\boldsymbol{r}^*(s^*)$的副法线重合，则

$$\boldsymbol{r}^*(s^*) = \boldsymbol{r}(s) + \lambda(s)\boldsymbol{\beta}(s).$$

于是有

$$\dot{\boldsymbol{r}}^* \frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}s} = \dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\lambda}\boldsymbol{\beta} + \lambda\dot{\boldsymbol{\beta}},$$

$$\boldsymbol{\alpha}^* \frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}\boldsymbol{\beta} + \lambda(-k\boldsymbol{\alpha} + \tau\boldsymbol{\gamma}).$$

因为 $\boldsymbol{\beta} /\!/ \boldsymbol{\gamma}^*$，于是 $\boldsymbol{\beta} \perp \boldsymbol{\alpha}^*$，$\boldsymbol{\beta} \perp \boldsymbol{\beta}^*$，上式两边点乘 $\boldsymbol{\beta}$，可得 $\dot{\lambda} = 0$，从而 λ 是常数. 设 $\lambda = \lambda_0$，则

$$\boldsymbol{\alpha}^*\frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}s}=(1-\lambda_0 k)\boldsymbol{\alpha}+\lambda_0\tau\boldsymbol{\gamma}.$$

上式两边对 s 求微商，可得

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}^*\left(\frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}s}\right)^2+\boldsymbol{\alpha}^*\frac{\mathrm{d}^2 s^*}{\mathrm{d}s^2}=(1-\lambda_0 k)^{\cdot}\boldsymbol{\alpha}+k(1-\lambda_0 k)\boldsymbol{\beta}+$$

$$(\lambda_0\tau)^{\cdot}\boldsymbol{\gamma}-\lambda_0\tau^2\boldsymbol{\beta}.$$

上式两边点乘 $\boldsymbol{\beta}$，可得

$$k(1-\lambda_0 k)-\lambda_0\tau^2=0,$$

即

$$k=\lambda_0(k^2+\tau^2).$$

17 解 因为 $\boldsymbol{r}=\left\{a(t-\sin t),a(1-\cos t),4a\cos\frac{t}{2}\right\}$,

$\boldsymbol{r}'=\left\{a(1-\cos t),a\sin t,-2a\sin\frac{t}{2}\right\}$,

$\boldsymbol{r}''=\left\{a\sin t,a\cos t,-a\cos\frac{t}{2}\right\}$,

$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=-2a^2\sin^2\frac{t}{2}\left\{\sin\frac{t}{2},\cos\frac{t}{2},1\right\}$.

$$k=\frac{1}{8a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}.$$

当 $\frac{t}{2}=\frac{\pi}{2}+n\pi$，即 $t=\pi+2n\pi=(2n+1)\pi$ 时，$\frac{1}{k}=\rho$ 最大.

18 解：因为 $\boldsymbol{r}(s)$ 在 s_0 点的泰勒展开式

$$\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)=\boldsymbol{r}(s_0)+\dot{\boldsymbol{r}}(s_0)\Delta s+\frac{1}{2!}\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)(\Delta s)^2+$$

$$\frac{1}{3!}[\dddot{\boldsymbol{r}}(s_0)+\boldsymbol{\varepsilon}(s_0,\Delta s)](\Delta s)^3,$$

于是 $\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)$

$$=\boldsymbol{\alpha}(s_0)\Delta s+\frac{1}{2}k_0\boldsymbol{\beta}(s_0)(\Delta s)^2+\frac{1}{6}\{\dot{k}(s_0)\boldsymbol{\beta}(s_0)+$$

$$k_0[-k_0\boldsymbol{\alpha}(s_0)+\tau_0\boldsymbol{\gamma}(s_0)]+[\varepsilon_1(s_0)\boldsymbol{\alpha}(s_0)+\varepsilon_2(s_0)\boldsymbol{\beta}(s_0)+$$

$$\varepsilon_3(s_0)\boldsymbol{\gamma}(s_0)]\}(\Delta s)^3$$

$$=\left[\Delta s-\frac{1}{6}k_0^2(\Delta s)^3+\frac{1}{6}\varepsilon_1(s_0)(\Delta s)^3\right]\boldsymbol{\alpha}(s_0)+$$

$$\left[\frac{1}{2}k_0(\Delta s)^2+\frac{1}{6}\dot{k}(s_0)(\Delta s)^3+\frac{1}{6}\varepsilon_2(s_0)(\Delta s)^3\right]\boldsymbol{\beta}(s_0)+$$

$$\left[\frac{1}{6}k_0\tau_0(\Delta s)^3+\frac{1}{6}\varepsilon_3(s_0)(\Delta s)^2\right]\boldsymbol{\gamma}(s_0).$$

设 z,x,y 分别是 $\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)$ 点到 $\boldsymbol{r}(s_0)$ 点的密切平面、法平面、从切平面的距离，则

$$x=|[\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)]\cdot\boldsymbol{\alpha}(s_0)|$$

$$=\left|\Delta s-\frac{1}{6}k_0^2(\Delta s)^3+\frac{1}{6}\varepsilon_1(s_0)(\Delta s)^3\right|,$$

$$y=|[\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)]\cdot\boldsymbol{\beta}(s_0)|$$

$$=\left|\frac{1}{2}k_0(\Delta s)^2+\frac{1}{6}k(s_0)(\Delta s)^3+\frac{1}{6}\varepsilon_2(s_0)(\Delta s)^3\right|,$$

$$z=|[\boldsymbol{r}(s_0+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s_0)]\cdot\boldsymbol{\gamma}(s_0)|$$

$$=\left|\frac{1}{6}k_0\tau_0(\Delta s)^3+\frac{1}{6}\varepsilon_3(s_0)(\Delta s)^3\right|.$$

当 $\Delta s\to 0$ 时，$\boldsymbol{\varepsilon}(s_0)\to 0$，即 $\varepsilon_1(s_0),\varepsilon_2(s_0),\varepsilon_3(s_0)\to 0$ 所以，若 $k_0\neq 0$，则以上三个距离的近似值分别为

$$x\approx|\Delta s|,$$

$$y\approx\left|\frac{1}{2}k_0(\Delta s)^2\right|=\frac{1}{2}k_0|\Delta s|^2,$$

$$z=\left|\frac{1}{6}k_0\tau_0(\Delta s)^3\right|=\frac{1}{6}k_0|\tau_0||\Delta s|^3.$$

若 $k_0=0$，$\dot{k}(s_0)\neq 0$，则近似距离分别为

$$x\approx|\Delta s|,$$

$$y\approx\left|\frac{1}{6}\dot{k}(s_0)(\Delta s)^3\right|=\frac{1}{6}|\dot{k}(s_0)||\Delta s|^3,$$

$$z\approx\left|\frac{1}{6}k_0\tau_0(\Delta s)^3\right|=\frac{1}{6}k_0|\tau_0||\Delta s|^3.$$

19 证明：

(1) 因为 $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = k\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\gamma}} = -\tau\boldsymbol{\beta}$，所以

$$-\dot{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}} = -k\boldsymbol{\beta}\cdot -\tau\boldsymbol{\beta} = k\tau.$$

(2) 因为

$$\begin{aligned}(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}}) &= (\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\beta}, \dot{k}\boldsymbol{\beta} + k(-k\boldsymbol{\alpha} + \tau\boldsymbol{\gamma}))\\ &= (\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\beta}, \dot{k}\boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\beta}, -k^2\boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\beta}, k\tau\boldsymbol{\gamma})\\ &= k^2\tau(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = k^2\tau.\end{aligned}$$

20 证明：

(1) 因为 $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = k\boldsymbol{\beta}$,

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{\alpha}} &= \dot{k}\boldsymbol{\beta} + k\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{k}\boldsymbol{\beta} - k^2\boldsymbol{\alpha} + k\tau\boldsymbol{\gamma},\\ \dddot{\boldsymbol{\alpha}} &= \ddot{k}\boldsymbol{\beta} + \dot{k}\dot{\boldsymbol{\beta}} - 2k\dot{k}\boldsymbol{\alpha} - k^2\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \dot{k}\tau\boldsymbol{\gamma} + k\dot{\tau}\boldsymbol{\gamma} + k\tau\dot{\boldsymbol{\gamma}}\\ &= \ddot{k}\boldsymbol{\beta} - k\dot{k}\boldsymbol{\alpha} + \dot{k}\tau\boldsymbol{\gamma} - 2k\dot{k}\boldsymbol{\alpha} - k^3\boldsymbol{\beta} + \dot{k}\tau\boldsymbol{\gamma} +\\ &\quad k\dot{\tau}\boldsymbol{\gamma} - k\tau^2\boldsymbol{\beta}\\ &= -3k\dot{k}\boldsymbol{\alpha} + (\ddot{k} - k^3 - k\tau^2)\boldsymbol{\beta} + (2\dot{k}\tau + \dot{\tau}k)\boldsymbol{\gamma}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\dddot{\boldsymbol{\alpha}}) &= \begin{vmatrix} 0 & k & 0\\ -k^2 & \dot{k} & k\tau\\ -3k\dot{k} & \ddot{k} - k^3 - k\tau^2 & 2\dot{k}\tau + \dot{\tau}k\end{vmatrix}\\ &= k(k^3\dot{\tau} - k^2\dot{k}\tau)\\ &= k^3(k\dot{\tau} - \dot{k}\tau),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k^5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\tau}{k}\right) &= k^5\cdot\frac{\dot{\tau}k - \tau\dot{k}}{k^2}\\ &= k^3(k\dot{\tau} - \dot{k}\tau).\end{aligned}$$

所以 $(\dot{\boldsymbol{\alpha}},\ddot{\boldsymbol{\alpha}},\dddot{\boldsymbol{\alpha}}) = k^5\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\dfrac{\tau}{k}\right)$.

(2) 因为 $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = -\tau\boldsymbol{\beta}$,

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{\gamma}} &= -\dot{\tau}\boldsymbol{\beta} - \tau(-k\boldsymbol{\alpha} + \tau\boldsymbol{\gamma})\\ &= -\dot{\tau}\boldsymbol{\beta} + k\tau\boldsymbol{\alpha} - \tau^2\boldsymbol{\gamma},\end{aligned}$$

$$\dddot{\boldsymbol{\gamma}} = -\ddot{\tau}\boldsymbol{\beta} - \dot{\tau}\dot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{k}\tau\boldsymbol{\alpha} + k\dot{\tau}\boldsymbol{\alpha} + k\tau\dot{\boldsymbol{\alpha}} - 2\tau\dot{\tau}\boldsymbol{\gamma} - \tau^2\dot{\boldsymbol{\gamma}}$$
$$= (2\dot{\tau}k + \dot{k}\tau)\boldsymbol{\alpha} + (\tau^3 + \tau k^2 - \ddot{\tau})\boldsymbol{\beta} - 3\tau\dot{\tau}\boldsymbol{\gamma},$$

所以

$$(\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \ddot{\boldsymbol{\gamma}}, \dddot{\boldsymbol{\gamma}}) = \begin{vmatrix} 0 & -\tau & 0 \\ k\tau & -\dot{\tau} & -\tau^2 \\ 2\dot{\tau}k + \dot{k}\tau & \tau^3 + \tau k^2 - \ddot{\tau} & -\tau\dot{\tau} \end{vmatrix}$$
$$= \tau^3(-k\dot{\tau} + \dot{k}\tau),$$

而
$$\tau^5 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{k}{\tau}\right) = \tau^5 \frac{\dot{k}\tau - k\dot{\tau}}{\tau^2} = \tau^3(\dot{k}\tau - k\dot{\tau}),$$

所以
$$(\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \ddot{\boldsymbol{\gamma}}, \dddot{\boldsymbol{\gamma}}) = \tau^5 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{k}{\tau}\right).$$

21 解 $\because \boldsymbol{r}(t) = \left\{\int f(t)\sin t\mathrm{d}t, \int f(t)\cos t\mathrm{d}t, \int f(t)\tan t\mathrm{d}t\right\}$,

$\therefore$ $\boldsymbol{r}' = \{f(t)\sin t, f(t)\cos t, f(t)\tan t\}$.

$$\boldsymbol{r}'' = \{f'(t)\sin t + f(t)\cos t, f'(t)\cos t - f(t)\sin t, f'(t)\tan t + f(t)\sec^2 t\}$$
$$= \{f'(t)\sin t, f'(t)\cos t, f'(t)\tan t\} + \{f(t)\cos t, -f(t)\sin t, f(t)\sec^2 t\}.$$

$$\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' = \{f(t)\sin t, f(t)\cos t, f(t)\tan t\} \times \{f(t)\cos t, -f(t)\sin t, f(t)\sec^2 t\}$$
$$= \left\{f^2(t)\frac{1 + \sin^2 t}{\cos t}, f^2(t)\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}, -f^2(t)\right\},$$

$|\boldsymbol{r}'| = f(t)\sec t$,

$|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''| = f^2(t)\sec^2 t\sqrt{1 + \cos^2 t}$.

$$\therefore \quad k = \frac{f^2(t)\sec^2 t\sqrt{1 + \cos^2 t}}{f^3(t)\sec^3 t} = \frac{\cos t\sqrt{1 + \cos^2 t}}{f(t)}.$$

若 $k = k_0 = \text{const}$,则 $f(t) = k_0\left(\cos t\sqrt{1 + \cos^2 t}\right)$.

22 解:因为 $\boldsymbol{r} = \{t, \sin t, \varphi(t)\}$,所以

$\boldsymbol{r}'(t) = \{1, \cos t, \varphi'(t)\}$,

$$\boldsymbol{r}''(t)=\{0,-\sin t,\varphi''(t)\},$$
$$\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)=\{\cos t\varphi''(t)+\sin t\varphi'(t),-\varphi''(t),-\sin t\}.$$

主法线的方向为

$$(\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t))\times\boldsymbol{r}'=\{\cos t\sin t-\varphi'(t)\varphi''(t),-\cos t\varphi'(t)\varphi''(t)+\sin t[\varphi'(t)]^2+\sin t,\cos^2 t\varphi''(t)+\cos t\sin t\varphi'(t)+\varphi''(t)\}.$$

由主法线与 yOz 平面平行,知主法线的方向与 x 轴垂直,故有

$$\cos t\sin t-\varphi'(t)\varphi''(t)=0,$$

即

$$\cos t\sin t=\varphi'(t)\varphi''(t),$$
$$\varphi'(t)\frac{\mathrm{d}\varphi'(t)}{\mathrm{d}t}=\cos t\sin t,$$
$$\varphi'(t)\mathrm{d}\varphi'(t)=\cos t\sin t\mathrm{d}t.$$

两边积分,得

$$\varphi'(t)=\sin t,$$

从而

$$\varphi(t)=-\cos t+C.$$

23 证明:∵ $\boldsymbol{r}^*=\frac{1}{\tau_0}\boldsymbol{\beta}-\int\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}s,$

$$\therefore\quad(\boldsymbol{r}^*)'=\frac{1}{\tau_0}\dot{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\gamma}$$
$$=\frac{1}{\tau_0}(-k\boldsymbol{\alpha}+\tau_0\boldsymbol{\gamma})-\boldsymbol{\gamma}$$
$$=-\frac{k}{\tau_0}\boldsymbol{\alpha},$$
$$(\boldsymbol{r}^*)''=-\frac{\dot{k}}{\tau_0}\boldsymbol{\alpha}-\frac{k}{\tau_0}(+k\boldsymbol{\beta})$$
$$=-\frac{\dot{k}}{\tau_0}\boldsymbol{\alpha}-\frac{k^2}{\tau_0}\boldsymbol{\beta},$$

$$(\boldsymbol{r}^*)''' = -\frac{\ddot{k}}{\tau_0}\boldsymbol{\alpha} - \frac{\dot{k}}{\tau_0}k\boldsymbol{\beta} - \frac{2k\dot{k}}{\tau_0}\boldsymbol{\beta} - \frac{k^2}{\tau_0}(-k\boldsymbol{\alpha} + \tau_0\boldsymbol{\gamma})$$

$$= \left(\frac{k^3 - \ddot{k}}{\tau_0}\right)\boldsymbol{\alpha} - \frac{3k\dot{k}}{\tau_0}\boldsymbol{\beta} - k^2\boldsymbol{\gamma},$$

$$(\boldsymbol{r}^*)' \times (\boldsymbol{r}^*)'' = \frac{k^3}{\tau_0^2}\boldsymbol{\gamma},$$

$$|(\boldsymbol{r}^*)' \times (\boldsymbol{r}^*)''| = \frac{k^3}{\tau_0^2}, \quad |(\boldsymbol{r}^*)'| = \left|\frac{k}{\tau_0}\right|,$$

∴
$$k^* = \frac{\dfrac{k^3}{\tau_0^2}}{\left|\dfrac{k}{\tau_0}\right|^3} = |\tau_0|.$$

又 $((\boldsymbol{r}^*)', (\boldsymbol{r}^*)'', (\boldsymbol{r}^*)''') = -\dfrac{k^5}{\tau_0^2}$，所以

$$k^* = \frac{-\dfrac{k^5}{\tau_0^2}}{\left(\dfrac{k^3}{\tau_0^2}\right)^2} = -\frac{\tau_0^2}{k}.$$

24 证明：设固定方向为单位向量 $\boldsymbol{e}$，

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\alpha} = \cos\theta, \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\gamma} = \cos\varphi.$$

两式对 s 求微商：

$$\boldsymbol{e}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\sin\theta\mathrm{d}\theta, \mathrm{e}\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}} = -\sin\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

即
$$k\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\beta} = -\sin\theta\mathrm{d}\theta, \tau\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\beta} = \sin\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

消去 $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\beta}$ 得

$$\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\sin\varphi\mathrm{d}\varphi} = -\frac{k}{\tau}.$$

25 证明：∵ $\boldsymbol{r} = \left\{a\int\sin\varphi\mathrm{d}t, a\int\cos\varphi\mathrm{d}t, bt\right\}$，

∴ $\boldsymbol{r}' = \{a\sin\varphi(t), a\cos\varphi(t), b\}$，

$\boldsymbol{r}'' = \{a\cos\varphi(t)\cdot\varphi'(t), -a\sin\varphi(t)\cdot\varphi'(t), 0\}$，

$\boldsymbol{r}''' = a\varphi''(t)\{\cos\varphi(t), -\sin\varphi(t), 0\} + a[\varphi'(t)]^2\cdot$

$\{-\sin\varphi(t), -\cos\varphi(t), 0\}$.

$$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'' = a\varphi'(t)\{b\sin\varphi(t), b\cos\varphi(t), -a\}.$$

$$|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''| = a\varphi'(t)\sqrt{a^2+b^2},$$

$$|\boldsymbol{r}'| = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''') = -a^2 b[\varphi'(t)]^3,$$

$\therefore$
$$k = \frac{a}{a^2+b^2}\varphi'(t),$$

$$\tau = -\frac{b}{a^2+b^2}\varphi'(t),$$

$$\frac{k}{\tau} = -\frac{a}{b}.$$

$\therefore$ 此曲线是一般螺线.

26 解：$\because$ $\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-\sin t, \cos t, 1\}$,

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-\cos t, -\sin t, 0\}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}.$$

$\therefore$
$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = -\tau\sqrt{2}, \tau\neq 0.$$

$$\boldsymbol{\beta} = \pm\{\cos t, \sin t, 0\},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sin t, \cos t, 1\}.$$

$\because$
$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = k\boldsymbol{\beta} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\cos t, \sin t, 0\}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},$$

$\therefore$
$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-\cos t, -\sin t, 0\}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}.$$

$\therefore$
$$\tau = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},$$

$\therefore$
$$\frac{k}{\tau} = \pm 1.$$

故曲线(C)是一般螺线.

27 证明:设曲线(C):$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,$s$是$(C)$的自然参数,曲线$(\overline{C})$的方程为$\overline{\boldsymbol{r}}=\overline{\boldsymbol{r}}(\overline{s})$其中$\overline{s}$是曲线$(\overline{C})$的自然参数,则有

$$\overline{\boldsymbol{r}}(\overline{s})=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(s)\boldsymbol{\beta}(s),$$

其中$\lambda(s)$表示一对对应点之间的距离.于是

$$\dot{\overline{\boldsymbol{r}}}=[\boldsymbol{\alpha}+\dot{\lambda}\boldsymbol{\beta}+\lambda(-k\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma})]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\overline{s}},$$

即

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}=[(1+\lambda k)\boldsymbol{\alpha}+\dot{\lambda}\boldsymbol{\beta}+\lambda\tau\boldsymbol{\gamma}]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\overline{s}}.$$

由于 $\overline{\boldsymbol{\beta}}=\pm\boldsymbol{\beta}$,所以曲线$(\overline{C})$的切向量$\overline{\boldsymbol{\alpha}}$与$\boldsymbol{\beta}$垂直,将上式两边点乘$\boldsymbol{\beta}$得

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\dot{\lambda}\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\overline{s}}=0,$$

但 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\overline{s}}\neq0$,所以$\dot{\lambda}=0$,即

$$\lambda=\text{常数}\neq0,$$

所以两曲线在对应点间的距离处处相等.

28 证明:设曲线(C)与曲线$(\overline{C})$在对应点的切向量分别为$\boldsymbol{\alpha}$与$\overline{\boldsymbol{\alpha}}$,它们之间的夹角为$\theta(s)$,则有

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{\alpha}\cos\theta+\boldsymbol{\gamma}\sin\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\alpha}}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\alpha}}}{\mathrm{d}\overline{s}}\cdot\frac{\mathrm{d}\overline{s}}{\mathrm{d}s}=\overline{k}\ \overline{\boldsymbol{\beta}}\ \frac{\mathrm{d}\overline{s}}{\mathrm{d}s},$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\alpha}}{\mathrm{d}s}=(k\cos\theta-\tau\sin\theta)\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\alpha}\sin\theta+\boldsymbol{\gamma}\cos\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}.$$

从而得到

$$\overline{k}\ \overline{\boldsymbol{\beta}}\ \frac{\mathrm{d}\overline{s}}{\mathrm{d}s}=(k\cos\theta-\tau\sin\theta)\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\alpha}\sin\theta+\boldsymbol{\gamma}\cos\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}.$$

但$\overline{\boldsymbol{\beta}}$与$\boldsymbol{\beta}$平行,上式右边第二部分与$\boldsymbol{\beta}$垂直,所以这部分为零.又由于$-\boldsymbol{\alpha}\sin\theta+\boldsymbol{\gamma}\cos\theta$是一个单位向量,故$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=0$,即

$$\theta = \text{常数}.$$

29 证明:设曲线(C)是贝特朗曲线,$(\overline{C})$是它的侣线.由第27题知

$$\overline{\boldsymbol{r}}(\overline{s}) = \boldsymbol{r}(s) + \lambda\boldsymbol{\beta}(s),$$

其中 λ 是常数.由第28题知

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}} = [(1-\lambda k)\boldsymbol{\alpha} + \lambda\tau\boldsymbol{\gamma}]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\overline{s}},$$

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}\cos\theta + \boldsymbol{\gamma}\sin\theta.$$

其中 θ 是常数.又 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 垂直,则得

$$(1-\lambda k)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\overline{s}} = \cos\theta,$$

$$\lambda\tau\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\overline{s}} = \sin\theta.$$

从中消去$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\overline{s}}$即得

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda k & \cos\theta \\ \lambda\tau & \sin\theta \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$k\sin\theta + \tau\cos\theta = \frac{\sin\theta}{\lambda},$$

其中 $\lambda\neq 0$,此外 $\sin\theta\neq 0$,否则 $\tau=0$.

令 $\mu = \lambda\cot\theta$,则有

$$\lambda k + \mu\tau = 1,$$

其中 k,μ 都是常数.

下面证明这一条件对贝特朗曲线也是充分的.

设曲线(C)的曲率 k 和挠率 τ 满足条件$\lambda k + \mu\tau = 1$.其中 $\lambda\neq 0$.以$\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$除上式两边,

$$\frac{k\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} + \frac{\mu\tau}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}.$$

其中令 $\sin\theta=\dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\neq 0$.

构造曲线$(\overline{C})$：$\bar{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}(s)+\lambda\boldsymbol{\beta}(s)$，则

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=[(1-\lambda k)\boldsymbol{\alpha}+\lambda\tau\boldsymbol{\gamma}]\frac{ds}{d\bar{s}}.$$

上式又可改写成

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{\lambda\tau}{\sin\theta}(\boldsymbol{\alpha}\cos\theta+\boldsymbol{\gamma}\sin\theta)\frac{ds}{d\bar{s}}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}\cos\theta+\boldsymbol{\gamma}\sin\theta$ 是一个单位向量，所以

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\pm(\boldsymbol{\alpha}\cos\theta+\boldsymbol{\gamma}\sin\theta),$$

从而得到

$$\bar{k}\ \bar{\boldsymbol{\beta}}=\frac{d\bar{\boldsymbol{\alpha}}}{d\bar{s}}=\pm(k\cos\theta-\tau\sin\theta)\boldsymbol{\beta}\frac{ds}{d\bar{s}}.$$

由此可见 $\bar{\boldsymbol{\beta}}/\!/\boldsymbol{\beta}$. 由于$(\overline{C})$的点在$(\overline{C})$的主法线上，因而$(C)$与$(\overline{C})$的主法线重合，它们都是贝特朗曲线.

30 证明：由于 $k=\text{const}\neq 0$，取 $\lambda=\dfrac{1}{k}$，$\mu=0$，则有 $\lambda k+\mu\tau=0$，故(C)是贝特朗曲线，它的侣线方程为

$$\bar{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}(s)+\lambda\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{r}(s)+\frac{1}{k}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{r}(s)+\rho\boldsymbol{\beta}.$$

足见$(\overline{C})$是(C)的曲率中心的轨迹.

$$\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}=\boldsymbol{\alpha}(s)+\lambda(-k\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma})\frac{ds}{d\bar{s}}.$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\lambda\tau\boldsymbol{\gamma}\frac{ds}{d\bar{s}}.$$

因此，有 $\lambda\tau\dfrac{ds}{d\bar{s}}=\pm 1$，即$\dfrac{\tau}{k}\dfrac{ds}{d\bar{s}}=\pm 1$.

对 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 求导，得

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}=-\lambda\tau^2\boldsymbol{\beta}\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2,$$

$$\bar{k}\ \bar{\boldsymbol{\beta}}=-\lambda\tau^2\boldsymbol{\beta}\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2=-k\frac{\tau^2}{k^2}\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2\boldsymbol{\beta}=-k\boldsymbol{\beta},$$

所以

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = -\boldsymbol{\beta}, \bar{\boldsymbol{\gamma}} = \pm \boldsymbol{\alpha},$$

$$-\bar{\tau}\bar{\boldsymbol{\beta}} \frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}s} = \pm(k\boldsymbol{\beta}),$$

$$\bar{\tau} \cdot \frac{\tau}{k} = k, \tau\bar{\tau} = k^2,$$

或记为

$$\bar{\tau} = \frac{k^2}{\tau}.$$

31 证明：$(C^*): \boldsymbol{r}^* = a\boldsymbol{r}(s) + b\left(-\frac{1}{\tau}\boldsymbol{\beta}(s) + \int \boldsymbol{\gamma}(s)\mathrm{d}s\right)$ 其中 a、b 为常数，曲线 (C) 的挠率 τ 也是常数.

$$(\boldsymbol{r}^*)' = a\boldsymbol{\alpha} + b\frac{k}{\tau}\boldsymbol{\alpha} = \left(a + b\frac{k}{\tau}\right)\boldsymbol{\alpha},$$

$$(\boldsymbol{r}^*)'' = k\left(a + \frac{b}{\tau}k\right)\boldsymbol{\beta} + \frac{b}{\tau}\dot{k}\boldsymbol{\alpha},$$

$$(\boldsymbol{r}^*)''' = \left(-ak^2 - \frac{b}{\tau}k^3 + \frac{b}{\tau}\ddot{k}\right)\boldsymbol{\alpha} + \left(a\dot{k} + 3\frac{b}{\tau}k\dot{k}\right)\boldsymbol{\beta} + k\tau\left(a + \frac{b}{\tau}k\right)\boldsymbol{\gamma},$$

$$(\boldsymbol{r}^*)' \times (\boldsymbol{r}^*)'' = k\left(a + \frac{b}{\tau}k\right)^2 \boldsymbol{\gamma},$$

$$((\boldsymbol{r}^*)', (\boldsymbol{r}^*)'', (\boldsymbol{r}^*)''') = \tau k^2\left(a + \frac{b}{\tau}k\right)^3.$$

$$\bar{k} = \frac{|(\boldsymbol{r}^*)' \times (\boldsymbol{r}^*)''|}{|(\boldsymbol{r}^*)'|^3} = \frac{k\left(a + \frac{b}{\tau}k\right)^2}{\left(a + \frac{b}{\tau}k\right)^3} = \frac{k}{\left(a + \frac{b}{\tau}k\right)},$$

$$\bar{\tau} = \frac{((\boldsymbol{r}^*)', (\boldsymbol{r}^*)'', (\boldsymbol{r}^*)''')}{|(\boldsymbol{r}^*)' \times (\boldsymbol{r}^*)''|^2} = \frac{\tau k^2\left(a + \frac{b}{\tau}k\right)^3}{k^2\left(a + \frac{b}{\tau}k\right)^4} = \frac{\tau}{\left(a + \frac{b}{\tau}k\right)}.$$

令

$$\lambda = \frac{b}{\tau} = \text{const}, \mu = \frac{a}{\tau} = \text{const},$$

则

$$\lambda\bar{k} + \mu\bar{\tau} = 1.$$

故曲线是一般螺线.

32 证明:方法 1 对 $\boldsymbol{r}^* = R\boldsymbol{\alpha}(s) - \int \boldsymbol{\beta}(s)\mathrm{d}s$,两边对 s 求微商得

$$\boldsymbol{\alpha}^* \frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}s} = \dot{R}\boldsymbol{\alpha},$$

所以 $$\boldsymbol{\alpha}^* = \pm\boldsymbol{\alpha}.$$

因为(C)是一般螺线,所以存在向量 $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{P} = C = \text{常数}.$$

所以 $$\boldsymbol{\alpha}^*\cdot\boldsymbol{P} = \pm\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{P} = \pm C = \text{常数}.$$

即$(\bar{C})$也是一般螺线.

方法 2 由于 $\boldsymbol{r}^* = R\boldsymbol{\alpha} - \int \boldsymbol{\beta}\mathrm{d}s$,所以

$$(\boldsymbol{r}^*)' = \dot{R}\boldsymbol{\alpha}, |(\boldsymbol{r}^*)'| = |\dot{R}|,$$

$$(\boldsymbol{r}^*)'' = \ddot{R}\boldsymbol{\alpha} + \dot{R}k\boldsymbol{\beta},$$

$$(\boldsymbol{r}^*)''' = (\dddot{R} - \dot{R}k^2)\boldsymbol{\alpha} + (2\ddot{R}k + \dot{R}\dot{k})\boldsymbol{\beta} + \dot{R}k\tau\boldsymbol{\gamma},$$

$$((\boldsymbol{r}^*)', (\boldsymbol{r}^*)'', (\boldsymbol{r}^*)''') = \dot{R}^3k^2\tau.$$

所以

$$\frac{k^*}{\tau^*} = \pm\frac{k}{\tau}.$$

故当(C)为一般螺线时,$(\bar{C})$也是一般螺线.

33 证明:方法 1 先证充分性:已知:$(\ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}}, \ddddot{\boldsymbol{r}}) = 0$,

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{\alpha}} = k\boldsymbol{\beta},$$

$$\dddot{\boldsymbol{r}} = -k^2\boldsymbol{\alpha} + \dot{k}\boldsymbol{\beta} + k\tau\boldsymbol{\gamma},$$

$$\ddddot{\boldsymbol{r}} = -3k\dot{k}\boldsymbol{\alpha} + (-k^3 + \ddot{k} - k\tau^2)\boldsymbol{\beta} + (2\dot{k}\tau + k\dot{\tau})\boldsymbol{\gamma},$$

$$(\ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}}, \ddddot{\boldsymbol{r}}) = k^3(k\dot{\tau} - \tau\dot{k}),$$

$$k^3(k\dot{\tau} - \tau\dot{k}) = 0.$$

① 若 $k=0$,则曲线是直线,是一般螺线的特例.

② 若 $k\neq 0$,则

$$k^5\cdot\frac{k\dot{\tau} - \tau\dot{k}}{k^2} = k^5\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} = 0,$$

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\cdot}=0 \Rightarrow \frac{\tau}{k}=\text{常数},$$

故曲线是一般螺线.

再证必要性:设曲线是一般螺线,则$\frac{\tau}{k}=$常数.所以

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\cdot}=0 \Rightarrow k^5\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\cdot}=0 \Rightarrow (\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}},\ddddot{\boldsymbol{r}})=0$$

方法 2　必要性:已知曲线是一般螺线,则$\frac{\tau}{k}=C,\tau=Ck$.

$$\dot{\tau}=C\dot{k} \Rightarrow k\dot{\tau}-\tau\dot{k}=Ck\dot{k}-Ck\dot{k}=0.$$

所以
$$(\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}},\ddddot{\boldsymbol{r}})=k^3(k\dot{\tau}-\tau\dot{k})=0.$$

充分性:由$(\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}},\ddddot{\boldsymbol{r}})=0 \Rightarrow k^3(k\dot{\tau}-\tau\dot{k})=0$

$$\Rightarrow k\dot{\tau}=\tau\dot{k} \Rightarrow \frac{\dot{k}}{k}=\frac{\dot{\tau}}{\tau} \Rightarrow \int\frac{\dot{k}}{k}=\int\frac{\dot{\tau}}{\tau}$$

$$\Rightarrow \ln k=\ln\tau+C_1 \Rightarrow k=\mathrm{e}^{C_1}\tau=C\tau$$

$\Rightarrow \frac{k}{\tau}=C=$常数.曲线是一般螺线.

方法 3　必要性:已知曲线是一般螺线,不妨设曲线的方程为

$\boldsymbol{r}=\{x(s),y(s),Cs\}$,其中 C 为常数.

所以
$$\dot{\boldsymbol{r}}=\{\dot{x},\dot{y},C\},$$
$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\{\ddot{x},\ddot{y},0\},$$
$$\dddot{\boldsymbol{r}}=\{\dddot{x},\dddot{y},0\},$$
$$\ddddot{\boldsymbol{r}}=\{\ddddot{x},\ddddot{y},0\},$$
$$(\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}},\ddddot{\boldsymbol{r}})=0.$$

充分性:

已知

$$(\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}},\ddddot{\boldsymbol{r}})=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z}\\ \ddddot{x} & \ddddot{y} & \ddddot{z}\end{vmatrix}=0.$$

此行列式一定有两列元素成比例,不妨设后两行成比例.

① 有一列元素是 0，不妨设最后一列，则

$$\ddot{z}=0 \Rightarrow \dot{z}=C, z=Cs+C_1.$$

所以曲线的方程为

$$\boldsymbol{r}=\{x(s), y(s), Cs+C_1\},$$

其中 C, C_1 是常数，曲线为一般螺线.

② 两列元素都不为 0，则至少有 $\ddot{y}\neq 0, \ddot{z}\neq 0$. 所以有

$\ddot{y}=\lambda(s)\ddot{z}, \dddot{y}=\lambda(s)\dddot{z}, \ddddot{y}=\lambda(s)\ddddot{z}$.

$$\frac{\dddot{y}}{\ddot{y}}=\frac{\dddot{z}}{\ddot{z}}.$$

所以 $$\int\frac{\dddot{y}}{\ddot{y}}=\int\frac{\dddot{z}}{\ddot{z}} \Rightarrow \ln\ddot{y}=\ln\ddot{z}+C_1, \ddot{y}=e^{C_1}\cdot\ddot{z}.$$

即 $$\lambda(s)=e^{C_1}. \Rightarrow \ddot{\boldsymbol{r}}=\{\ddot{x}, e^{C_1}\ddot{z}, \ddot{z}\}.$$

取固定向量 $\boldsymbol{\rho}=\{0, e^{-C_1}, -1\}$，则

$$\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\rho}=\ddot{x}\cdot 0+e^{C_1}\cdot e^{-C_1}\ddot{z}-\ddot{z}=0.$$

因为 $\ddot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{\alpha}}=k\vec{\boldsymbol{\beta}}$，所以 $k\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\rho}=0$，由所设 $\ddot{y}\neq 0, \ddot{z}\neq 0$，则 $k=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}=|\ddot{\boldsymbol{r}}|>0$. 所以 $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\rho}=0$，即曲线是一般螺线.

34 证明：采用反证法.

若曲线 (C) 与曲线 (C^*) 在对应点有公共的切线，则 $(C): \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s), (\boldsymbol{r}^*): \boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(s)\boldsymbol{\alpha}(s)$.

$$\frac{d\boldsymbol{r}^*}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}^*}{ds^*}\cdot\frac{ds^*}{ds}=\dot{\boldsymbol{r}}(s)+\dot{\lambda}(s)\boldsymbol{\alpha}(s)+\lambda(s)\dot{\boldsymbol{\alpha}},$$

即 $$\boldsymbol{\alpha}^*\frac{ds^*}{ds}=(1+\dot{\lambda})\boldsymbol{\alpha}+\lambda k\boldsymbol{\beta}.$$

因为 (C) 与 (C^*) 有公共的切线，所以

$$\boldsymbol{\alpha}^* /\!/ \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^*=\pm\boldsymbol{\alpha}.$$

则有 $$\lambda(s)k=0.$$

① 若 $\lambda(s)=0$，则 (C) 与 (C^*) 重合.

② 若 $k(s)=0$，则 (C) 是直线，并与其上的任一点的切线重合，故与 (C^*) 重合，与题设矛盾. 所以原命题为真.

35　证明：设曲线(C)：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，曲线$(C^*)$：$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}^*(s^*)$. 根据第14题结论知它们的主法线和副法线也分别平行.即

$$\boldsymbol{\alpha}^*\parallel\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}^*\parallel\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\gamma}^*\parallel\boldsymbol{\gamma}.$$

两副标架都是右手系，则只有下列4种情形：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}^*=\boldsymbol{\alpha},\\ \boldsymbol{\beta}^*=\boldsymbol{\beta},\\ \boldsymbol{\gamma}^*=\boldsymbol{\gamma},\end{cases}\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}^*=\boldsymbol{\alpha},\\ \boldsymbol{\beta}^*=-\boldsymbol{\beta},\\ \boldsymbol{\gamma}^*=-\boldsymbol{\gamma},\end{cases}\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}^*=-\boldsymbol{\alpha},\\ \boldsymbol{\beta}^*=\boldsymbol{\beta},\\ \boldsymbol{\gamma}^*=-\boldsymbol{\gamma},\end{cases}\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}^*=-\boldsymbol{\alpha},\\ \boldsymbol{\beta}^*=-\boldsymbol{\beta},\\ \boldsymbol{\gamma}^*=\boldsymbol{\gamma}.\end{cases}$$

对第一种情形：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}^*}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}^*}{\mathrm{d}s^*}\cdot\frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}s}=\dot{\boldsymbol{\alpha}},\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}^*}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}^*}{\mathrm{d}s^*}\cdot\frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}s}=\dot{\boldsymbol{\gamma}},$$

即
$$k^*\boldsymbol{\beta}^*=k\boldsymbol{\beta}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s^*},\ -\tau^*\boldsymbol{\beta}^*=-\tau\boldsymbol{\beta}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s^*}.$$

因为$\boldsymbol{\beta}^*\parallel\boldsymbol{\beta}$，所以有

$$\frac{k}{k^*}=\frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}s},\ \frac{\tau}{\tau^*}=\frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}s},$$

故
$$\frac{k}{k^*}=\frac{\tau}{\tau^*}.$$

对于第二、三、四种情形同法可证$\frac{k}{k^*}=\frac{\tau}{k^*}$.从而有

$$\frac{k}{\tau}=\frac{k^*}{\tau^*}.$$

故当(C)是一般螺线时，$\frac{k}{\tau}=$常数$=\frac{k^*}{\tau^*}$，则(C^*)也是一般螺线.

36　证明：方法1

设固定直线的方向向量为$\boldsymbol{m}$，且$|\boldsymbol{m}|=1$.据已知条件：所有密切平面都垂直于$\boldsymbol{m}$.所以

$$\boldsymbol{\gamma}\parallel\boldsymbol{m},\boldsymbol{\gamma}=\pm\boldsymbol{m},$$
$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}=\pm\dot{\boldsymbol{m}}=\mathbf{0},\text{但}\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}=-\tau\boldsymbol{\beta},$$
$$|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|=|-\tau\boldsymbol{\beta}|=|\tau|=0,$$

曲线是平面曲线.

方法 2

因为所有密切平面都垂直于 $\boldsymbol{m}$. 所以

$$\boldsymbol{\gamma} /\!/ \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}.$$

两边求微商,得

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{m} + \boldsymbol{\gamma} \times \dot{\boldsymbol{m}} = -\tau \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\beta} \perp \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \tau = 0$. 曲线是平面曲线.

方法 3

据已知条件: $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\beta} \perp \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\gamma} /\!/ \boldsymbol{m}$. 所以

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{m} = 0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{m} + \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{m}} = (-k\boldsymbol{\alpha} + \tau\boldsymbol{\gamma}) \cdot \boldsymbol{m} = 0,$$

但是 $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{m} = 0$ 故 $\tau \dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \boldsymbol{m} = 0$. 但 $\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{m} \neq 0$, 所以 $\tau = 0$, 曲线是平面曲线.

37 证明:

设曲线 $(C): \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s), (C^*): \boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}(s) + \lambda(s)\boldsymbol{\gamma}(s)$.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*}{\mathrm{d}s^*} \cdot \frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}s} = \dot{\boldsymbol{r}}(s) + \dot{\lambda}(s)\boldsymbol{\gamma}(s) + \lambda(s)\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s),$$

$$\boldsymbol{\alpha}^* \frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}\boldsymbol{\gamma} - \lambda\tau\boldsymbol{\beta}. \tag{1}$$

因为 $\boldsymbol{\gamma}^* /\!/ \boldsymbol{\gamma}$, (已知), 即 $\boldsymbol{\gamma} = \pm \boldsymbol{\gamma}^*$. (1)式两端点乘 $\boldsymbol{\gamma}^*$ 和 $\pm\boldsymbol{\gamma}$, 得

$$0 = 0 + \dot{\lambda} + 0, \text{即 } \dot{\lambda}(s) = 0, \lambda = \text{常数}.$$

代入(1)式得

$$\boldsymbol{\alpha}^* \frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\alpha} - \lambda\tau\boldsymbol{\beta}. \tag{2}$$

两边对 s 求微商:

$$k^* \boldsymbol{\beta}^* \left(\frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \boldsymbol{\alpha}^* \frac{\mathrm{d}^2 s^*}{\mathrm{d}s^2} = (k - \lambda\dot{\tau})\boldsymbol{\beta} + \lambda k\tau\boldsymbol{\alpha} + \lambda\tau^2\boldsymbol{\gamma}.$$

两边点乘 $\boldsymbol{\gamma}$ 或 $\boldsymbol{\gamma}^*$:

$$0 + 0 = 0 + 0 - \lambda\tau^2. \text{即 } \lambda\tau^2 = 0.$$

但是 $\lambda \neq 0$(否则两曲线重合与题设不符). 所以有 $\tau = 0$, 曲线 (C) 是平面曲线. 又由于 $\boldsymbol{\gamma}^* = \pm\boldsymbol{\gamma}$, 两边求微商:

$$-\tau\boldsymbol{\beta} = \mp \tau^* \boldsymbol{\beta}^* \frac{ds^*}{ds},$$

$$\tau^* \boldsymbol{\beta}^* \frac{ds^*}{ds} = \pm \tau\boldsymbol{\beta} = 0.$$

但$\frac{ds^*}{ds} \neq 0, \boldsymbol{\beta}^* \neq 0 \Rightarrow \tau^* = 0$,曲线$(C)$也是平面曲线.

38 证明 因为 $\boldsymbol{r} = \{\cosh t, 2\sinh t, e^t\}$,所以

$\boldsymbol{r}' = \{\sinh t, 2\cosh t, e^t\}$,

$\boldsymbol{r}'' = \{\cosh t, 2\sinh t, e^t\}$,

$\boldsymbol{r}''' = \{\sinh t, 2\cosh t, e^t\}$.

$(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''') = 0$,即 $\tau = 0$,故曲线为平面曲线.

39 证明:因为 $\boldsymbol{r} = \{\sqrt{6}at^3, a(1+3t^2), \sqrt{6}at\}$,所以

$\boldsymbol{r}' = \{3\sqrt{6}at^2, 6at, \sqrt{6}a\}$,

$\boldsymbol{r}'' = \{6\sqrt{6}at, 6a, 0\}$,

$\boldsymbol{r}''' = \{6\sqrt{6}a, \quad 0, \quad 0\}$.

$\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' = 6a^2\{-\sqrt{6}, 6t, -3\sqrt{6}t^2\}$,

$|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''| = 6\sqrt{6}a^2(3t^2+1)$,

$(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''') = -216a^3$,

所以 $\tau = -\frac{a}{a^2(3t^2+1)^2} = -\frac{a}{y^2}$.

40 解:因为 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 是一组伏雷内标架,所以可设 $W(s) = a(s)\boldsymbol{\alpha} + b(s)\boldsymbol{\beta} + c(s)\boldsymbol{\gamma}$.

根据伏雷内公式有

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = k\boldsymbol{\beta} = W(s) \times \boldsymbol{\alpha} = b(s)\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha} + c(s)\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha},$$

即 $$k\boldsymbol{\beta} = -b(s)\boldsymbol{\gamma} + c(s)\boldsymbol{\beta}.$$

因为 $\boldsymbol{\gamma} \perp \boldsymbol{\beta}$,所以

$$b(s) = 0, c(s) = k,$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = -\tau\boldsymbol{\beta} = W(s) \times \boldsymbol{\gamma}$$
$$= a(s)\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\gamma} + b(s)\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\gamma}$$

$$= -a(s)\boldsymbol{\beta}.$$

所以 $a(s)=\tau$,故 $W(s)=\tau(s)\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\gamma}$.可以验证所得 $W(s)$满足:$\dot{\boldsymbol{\beta}}=W(s)\times\boldsymbol{\beta}$.

41 证明:因为 $\rho^2+(\dot{\rho}\sigma)^2=a^2$.对 s 求导得:

$$2\rho\dot{\rho}+2\dot{\rho}\sigma(\dot{\rho}\sigma)^{\cdot}=0,$$

即

$$\dot{\rho}(\rho+\sigma(\dot{\rho}\sigma)^{\cdot})=0.$$

因为 $\dot{\rho}=-\dfrac{\dot{k}}{k^2}\neq 0$,所以 $\rho+\sigma(\dot{\rho}\sigma)^{\cdot}=0$,又 $\sigma\neq 0$.所以

$$\rho\tau+(\dot{\rho}\sigma)^{\cdot}=0,$$

$$(\boldsymbol{r}+\rho\boldsymbol{\beta}+\dot{\rho}\sigma\boldsymbol{\gamma})^{\cdot}=\boldsymbol{\alpha}+\dot{\rho}\boldsymbol{\beta}+\rho\tau\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}+(\dot{\rho}\sigma)^{\cdot}\boldsymbol{\gamma}-\dot{\rho}\boldsymbol{\beta}$$

$$=[\rho\tau+(\dot{\rho}\sigma)^{\cdot}]\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0}.$$

所以 $\boldsymbol{r}+\rho\boldsymbol{\beta}+\dot{\rho}\sigma\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{m}$ 常向量.于是

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{m})^2=|-\rho\boldsymbol{\beta}-\dot{\rho}\sigma\boldsymbol{\gamma}|^2=\rho^2+(\dot{\rho}\sigma)^2=a^2.$$

所以 $\boldsymbol{r}(s)$的象在以 a 为半径的球面上.

42 证明:必要性:设 $\boldsymbol{r}(s)$在以 a 为半径,以 $\boldsymbol{m}$ 为球心的球面上,根据上题结果可设

$$\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m}=-\rho\boldsymbol{\beta}-\dot{\rho}\sigma\boldsymbol{\gamma}.$$

对 s 求导得

$$\boldsymbol{\alpha}=-\dot{\rho}\boldsymbol{\beta}-\rho(-k\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma})-(\dot{\rho}\sigma)^{\cdot}\boldsymbol{\gamma}+\dot{\rho}\sigma\tau\boldsymbol{\beta}.$$

所以 $\rho\tau+(\dot{\rho}\sigma)^{\cdot}=0$,即 $\rho\tau=-\left(\dfrac{\dot{\rho}}{\tau}\right)^{\cdot}$.

充分性:由 $\rho\tau=-\left(\dfrac{\dot{\rho}}{\tau}\right)^{\cdot}$ 知 $\dot{k}\neq 0$.对上式两边乘以 $\dot{\rho}\sigma$,移项得

$$\dot{\rho}\rho+(\dot{\rho}\sigma)(\dot{\rho}\sigma)^{\cdot}=0.$$

积分得 $\rho^2+(\dot{\rho}\sigma)^2=a^2$,故 $\boldsymbol{r}(s)$在一球面上.

43 证明:必要性:

设 $\boldsymbol{r}(s)$是球面曲线,则 $k>0$.

若 $\tau=0$,则 $\boldsymbol{r}(s)$是平面曲线,所以 $\boldsymbol{r}(s)$是圆,从而 $k=$ 常数,

所以 $\dot{\rho}=0$.

可命 $f=$ 常数,显然有 $\dot{f}+\tau\rho=0$ 及 $f\tau=\dot{\rho}$.

若 $\tau\neq0$,从习题 42 有 $\tau\rho+\left(\dfrac{\dot{\rho}}{\tau}\right)^{\cdot}=0$.

命 $f=\dfrac{\dot{\rho}}{\tau}$, $\tau\rho+\dot{f}=0$, $f\tau=\dot{\rho}$.

充分性:设 $k>0$,且 $f\tau=\dot{\rho}$, $\dot{f}t\tau\rho=0$. 若 $\tau=0$,则 $\dot{\rho}=0$,所以 $\boldsymbol{r}(s)$是一个圆,即 $\boldsymbol{r}(s)$是球面曲线. 若 $\tau\neq0$,则 $\dot{\rho}=f\tau\neq0$, $f=\dfrac{\dot{\rho}}{\tau}$. 于是

$$\left(\frac{\dot{\rho}}{\tau}\right)^{\cdot}+\tau\rho=0$$

从上题知,$\boldsymbol{r}(s)$是球面曲线.

44 证明:必要性:

设 $\boldsymbol{r}(s)$是一球面曲线,$k>0$,存在 f 使

$$f\tau=\dot{\rho},\ \dot{f}t\tau\rho=0. \tag{*}$$

若 $\tau=0$,由(*)得 $\dot{\rho}=0$. 即 $k=$ 常数.

取 $A=1/k$, B 为一固定数. 则

$$k\left[A\cos\left(\int_0^s\tau\mathrm{d}s\right)+B\sin\left(\int_0^s\tau\mathrm{d}s\right)\right]\equiv1.$$

若 $\tau\neq0$,由(*)得

$$\left(\frac{\dot{\rho}}{\tau}\right)^{\cdot}+\tau\rho=0.$$

命 $f=\displaystyle\int_0^s\tau\mathrm{d}s$,则$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}=\tau$,故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}f}\right)+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\rho=0.$$

即$\dfrac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}f^2}+\rho=0$. 解此微分方程,得

$$\rho=A\cos f+B\sin f,\ A,B\text{ 为常数}.$$

把 f 代入,即得

$$k\left[A\cos\left(\int_0^s \tau \mathrm{d}s\right)+B\sin\left(\int_0^s \tau \mathrm{d}s\right)\right]\equiv 1.$$

充分性：

设 $$f=-A\sin\left(\int_0^s \tau \mathrm{d}s\right)+B\cos\left(\int_0^s \tau \mathrm{d}s\right),$$

$$\dot{f}=-\tau\left[A\cos\left(\int_0^s \tau \mathrm{d}s\right)+B\sin\left(\int_0^s \tau \mathrm{d}s\right)\right].$$

因为 $$k\left[A\cos\left(\int_0^s \tau \mathrm{d}s\right)+B\sin\left(\int_0^s \tau \mathrm{d}s\right)\right]\equiv 1.$$

所以 $k\neq 0$ 及 $A\cos\left(\int_0^s \tau \mathrm{d}s\right)+B\sin\left(\int_0^s \tau \mathrm{d}s\right)\equiv\rho$. 从而

$$\dot{f}=-\tau\rho,\ f\tau=\dot{\rho},\ k>0.$$

由前题可知，$\boldsymbol{r}(s)$是球面曲线.

第二章 曲 面 论

习题 2.1

1 解 u - 曲线为($v=v_0$)

$$r=\{u\cos v_0, u\sin v_0, bv_0\},$$

它是与 z 轴垂直相交的直线.

v - 曲线($u=u_0$)为

$$r=\{u_0\cos v, u_0\sin v, bv\},$$

它是圆柱螺线.

2 证明 坐标曲线为

$$r=\{a(u+v_0), b(u-v_0), 2uv_0\},$$

$$r=\{a(u_0+v), b(u_0-v), 2u_0v\}.$$

它们都是直线族,又双曲抛物面上的直线必属于两族直母线之一,故曲面的坐标曲线就是它的直母线.

3 解 因为 $r=\{a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta\}$,

$$r_\varphi=\{-a\cos\theta\sin\varphi, a\cos\theta\cos\varphi, 0\},$$

$$r_\theta=\{-a\sin\theta\cos\varphi, -a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta\}.$$

所以,切平面的方程为

$$\begin{vmatrix} X-a\cos\theta\cos\varphi, & Y-a\cos\theta\sin\varphi, & Z-a\sin\theta \\ -a\cos\theta\sin\varphi & +a\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ -a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta \end{vmatrix}=0.$$

即 $$(\cos\theta\cos\varphi)X+(\cos\theta\sin\varphi)Y+\sin\theta Z-a=0.$$

法线方程为

$$\frac{X-a\cos\theta\cos\varphi}{\begin{vmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta \end{vmatrix}}=\frac{Y-a\cos\theta\sin\varphi}{\begin{vmatrix} 0 & -a\cos\theta\sin\varphi \\ a\cos\theta & -a\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{Z-a\sin\theta}{\begin{vmatrix} -a\cos\theta\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi \\ -a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix}},$$

即

$$\frac{X-a\cos\theta\cos\varphi}{\cos\theta\cos\varphi}=\frac{Y-\cos\theta\sin\varphi}{\cos\theta\sin\varphi}=\frac{Z-a\sin\theta}{\sin\theta}.$$

4 解 所给椭圆柱面的参数表示为

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,b\sin\theta,z\}.$$

于是

$$\boldsymbol{r}_\theta=\{-a\sin\theta,b\cos\theta,0\},$$

$$\boldsymbol{r}_z=\{0,0,1\}.$$

切平面的方程为

$$\begin{vmatrix} X-a\cos\theta & Y-b\sin\theta & Z-z \\ -a\sin\theta & b\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

即 $$(b\cos\theta)X+(a\sin\theta)Y-ab=0.$$

当 $\theta=\theta_0$时,

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta_0,b\sin\theta_0,z\},$$

为椭圆柱面上的一条直母线,所以在此直线上的每一点,该椭圆柱面的切平面均为

$$(b\cos\theta_0)X+(a\sin\theta_0)Y-ab=0.$$

5 证明 因为 $\boldsymbol{r}=\left\{u,v,\frac{a^3}{uv}\right\}$,所以

$$\boldsymbol{r}_u=\left\{1,0,-\frac{a^3}{u^2v}\right\},$$

$$\boldsymbol{r}_v=\left\{0,1,-\frac{a^3}{uv^2}\right\},$$

于是切平面的方程为

$$\begin{vmatrix} X-u & Y-v & Z-\dfrac{a^3}{uv} \\ 1 & 0 & -\dfrac{a^3}{u^2v} \\ 0 & 1 & -\dfrac{a^3}{uv^2} \end{vmatrix}=0,$$

即

$$\frac{a^3}{u^2v}X+\frac{a^3}{uv^2}Y+Z-3\frac{a^3}{uv}=0.$$

它在 x、y、z 三轴上的截距分别为 $3u,3v,\dfrac{3a^3}{uv}$,所以四面体的体积

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3u\cdot 3v\cdot\frac{3|a|^3}{uv}=\frac{9}{2}|a|^3=\text{const}.$$

6 解 因为 $\boldsymbol{r}=\{u+v,u^2+v^2,u^3+v^3\}$,所以

$$\boldsymbol{r}_u=\{1,2u,3u^2\},$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{1,2v,3v^3\}.$$

由已知条件有

$$u+v=2,\ u^2+v^2=2,\ u^3+v^3=2,$$

解得 $u=1,v=1.$

$$\boldsymbol{r}_u(1,1)=\{1,2,3\},$$

$$\boldsymbol{r}_v(1,1)=\{1,2,3\},$$

$$\boldsymbol{r}_u(1,1)\times\boldsymbol{r}_v(1,1)=\boldsymbol{0},$$

所以该点不是曲面上的正常点,故该点处没有切平面.

7 证明 设曲面上经过 P 点的任一条曲线的方程为 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$.或记为

$$\boldsymbol{r}=\{x(t),y(t),z(t)\},$$

则 $\boldsymbol{r}'_t=\left\{\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt}\right\}$是曲线的切向量.由

$$F(x(t),y(t),z(t))=0,$$

两边对 t 求微商,得

$$F'_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+F'_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=0.$$

因为 $\left\{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right\}$ 是曲线的切向量,所以 $\{F_x,F_y,F_z\}$ 是垂直于过切点 P 的一切曲面曲线的向量,因之可以作为曲面在 P 点处的法向量,于是经过 P 点的切平面的方程为

$$(x-x_0)F'_x(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)F'_y(x_0,y_0,z_0)+$$
$$(z-z_0)F'_z(x_0,y_0,z_0)=0.$$

8 解 曲面的方程为 $xyz=1$,则

$$F_x(x_0,y_0,z_0)=y_0z_0,F_y(x_0,y_0,z_0)$$
$$=x_0z_0,F'_z(x_0,y_0,z_0)=x_0y_0.$$

切平面的方程为

$$(x-x_0)y_0z_0+(y-y_0)x_0z_0+(z-z_0)x_0y_0=0,$$

或

$$xy_0z_0+yx_0z_0+zx_0y_0-3=0.$$

由两平面平行的条件

$$\frac{y_0z_0}{1}=\frac{x_0z_0}{1}=\frac{x_0y_0}{1},$$

解得 $x_0=1,y_0=1,z_0=1$.所求切平面的方程为

$$x+y+z=3.$$

9 证明 因为曲面方程为 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$,所以

$$F'_x=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},\ F'_y=\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}},\ F'_z=\frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}.$$

在曲面任一点 $P(x_0,y_0,z_0)$的切平面方程为

$$(x-x_0)x_0^{-\frac{1}{3}}+(y-y_0)y_0^{-\frac{1}{3}}+(z-z_0)z_0^{-\frac{1}{3}}=0,$$

即 $$xx_0^{-\frac{1}{3}}+yy_0^{-\frac{1}{3}}+zz_0^{-\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

与三坐标轴的交点分别为

$$(a^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{1}{3}},0,0);(0,a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}},0);(0,0,a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}}).$$

在三个坐标平面上的三条线段长的平方和为

$$\begin{aligned}&[(a^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{1}{3}})^2+(a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}})^2]+[(a^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{1}{3}})^2+(a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}})^2]+\\&\quad[(a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}})^2+(a^{\frac{2}{3}}z_0^{\frac{1}{3}})^2]\\&=2a^{\frac{4}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})\\&=2a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}=2a^2=\text{const}.\end{aligned}$$

10 证明　因为曲面的方程为 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$. 取 x 和 $t=\frac{y}{x}$ 为参数,则曲面的方程可写成:

$$\boldsymbol{r}=\{x,xt,f(t)x\},$$

则

$$\boldsymbol{r}_x=\{1,t,f(t)\},$$

$$\boldsymbol{r}_t=\{0,x,f'(t)x\}.$$

切平面的法向量(即曲面的法向量)为

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_t=\{xtf'(t)-xf(t),-xf'(t),x\}.$$

曲面上任一点处的切平面方程为

$$[xtf'(t)-xf(t)](X-x)-xf'(t)(Y-y)+x(Z-z)=0.$$

或

$$[xtf'(t)-xf(t)]X-xf'(t)Y+xZ+[xyf'(t)-x^2tf'(t)]+[x^2f(t)-xz]=0.$$

因为　$y=xt,z=xf(t)$,所以切平面的方程为

$$\left[yf'\left(\frac{y}{x}\right)-z\right]X-xf'\left(\frac{y}{x}\right)Y+xZ=0.$$

由此可知:切平面通过坐标原点,即此曲面的所有切平面都通过一个定点.

11 解　因为螺旋线方程为 $\boldsymbol{r}=\{a\cos t,a\sin t,bt\}$,则

$$\boldsymbol{r}'_t=\{-a\sin t,a\cos t,b\},$$

切线的方程为

$$\frac{x-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{z-bt}{b}.$$

设上述比值为 λ，则以 t,λ 为参数的切线曲面的方程为

$$\boldsymbol{r}=\{-a\lambda\sin t+a\cos t,a\lambda\cos t+a\sin t,b(t+\lambda)\},$$

$$\boldsymbol{r}_t=\{-a\lambda\cos t-a\sin t,-a\lambda\sin t+a\cos t,b\},$$

$$\boldsymbol{r}_\lambda=\{-a\sin t,a\cos t,b\},$$

$$\boldsymbol{r}_t\times\boldsymbol{r}_\lambda=\{-ab\lambda\sin t,ab\lambda\cos t,-a^2\lambda\}.$$

由于曲面除 $\lambda=0$ 的点外，各点的法向量可取为

$$\boldsymbol{N}=\{b\sin t,-b\cos t,a\},$$

它与 Oz 轴的夹角的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{N}||\boldsymbol{k}|}=\frac{0\cdot b\sin t+0(-b\cos t)+a}{\sqrt{b^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}=\text{const},$$

所以切线曲面的法线与 Oz 轴成定角.

12 证明：因为曲面 $S:\boldsymbol{r}=\{u\cos v,u\sin v,\varphi(v)\}$，所以

$$\boldsymbol{r}_u=\{\cos v,\sin v,0\},$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{-u\sin v,u\cos v,\varphi'(v)\},$$

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\{\varphi'\sin v,-\varphi'\cos v,u\},$$

$$|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|=\sqrt{u^2+\varphi'^2},$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\left\{\frac{\varphi'\sin v}{\sqrt{u^2+\varphi'^2}},-\frac{\varphi'\cos v}{\sqrt{u^2+\varphi'^2}},\frac{u}{\sqrt{u^2+\varphi'^2}}\right\}.$$

13 证明：因为曲面 $S:\boldsymbol{r}=\{u\cos v,u\sin v,a\sin 2v\}$. 设切点的坐标为 (u_0,v_0)，$(a\sin 2v)'=2a\cos 2v$. 代入上题的结果，并计算曲面的切平面方程为

$$2xa\sin v_0\cos 2v_0-2ya\cos v_0\cos 2v_0+zu_0-au_0\sin 2v_0=0.$$

将曲面的方程代入上式，得

$$2a\sin(v-v_0)[u_0\cos(v+v_0)-u\cos 2v_0]=0,$$

得交线的方程

$$v = v_0, \tag{1}$$

$$u = \frac{u_0}{\cos 2v_0}\cos(v + v_0). \tag{2}$$

交线(1)是通过切点的曲面的直母线.另一条交线的参数方程为

$$x = u_0\frac{\cos(v + v_0)}{\cos 2v_0}\cos v = \frac{u_0}{2\cos 2v_0}[\cos(2v + v_0) + \cos v_0],$$

$$y = u_0\frac{\cos(v + v_0)}{\cos 2v_0}\sin v = \frac{u_0}{2\cos 2v_0}[\sin(2v + v_0) - \sin v_0],$$

$$z = a\sin 2v.$$

由前两式消去 v 得

$$\left[\frac{x - \dfrac{u_0\cos v_0}{2\cos 2v_0}}{\dfrac{u_0}{2\cos 2v_0}}\right]^2 + \left[\frac{y + \dfrac{u_0\sin v_0}{2\cos 2v_0}}{\dfrac{u_0}{2\cos 2v_0}}\right]^2 = 1,$$

可知交线是一椭圆.

习题 2.2

1 解 $\boldsymbol{r} = \{a(u + v), b(u - v), 2uv\}$,

$\boldsymbol{r}_u = \{a, b, 2v\}$,

$\boldsymbol{r}_v = \{a, -b, 2u\}$.

$E = \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u = a^2 + b^2 + 4v^2$, $F = \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v = a^2 - b^2 + 4uv$,

$G = \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v = a^2 + b^2 + 4u^2$.

$\therefore$ $\mathrm{I} = (a^2 + b^2 + 4v^2)\mathrm{d}u^2 + 2(a^2 - b^2 + 4uv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v +$
$(a^2 + b^2 + 4u^2)\mathrm{d}v^2$.

2 解 $\boldsymbol{r} = \{u\cos v, u\sin v, bv\}$,

$\boldsymbol{r}_u = \{\cos v, \sin v, 0\}$,

$\boldsymbol{r}_v = \{-u\sin v, u\cos v, b\}$.

$E = 1, F = 0, G = u^2 + b^2$.

$\therefore$ $\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + (u^2 + b^2)\mathrm{d}v^2$.

又由于 $F=0$,所以坐标曲线互相垂直.

3　解　$\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+\sin\mathrm{h}^2 u\mathrm{d}v^2$,沿曲面上曲线 $u=v$,有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}u^2+\sin\mathrm{h}^2 u\mathrm{d}u^2\\ &=(1+\sinh^2 u)\mathrm{d}u^2\\ &=\cosh^2 u\mathrm{d}u^2.\end{aligned}$$

设曲线 $u=v$ 上两点 $A(u_1)$,$B(u_2)(u_1<u_2)$,则曲线的弧长为

$$\begin{aligned}s &= \int_{u_1}^{u_2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{\cosh^2 u}\mathrm{d}u\\ &=\left|\sinh u\Big|_{u_1}^{u_2}\right|=|\sinh u_2-\sinh u_1|.\end{aligned}$$

4　解　由 $\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2$,得

$$E=1,F=0,G=u^2+a^2.$$

曲线 $u+v=0$,$u-v=0$ 的交点为 $u=0$,$v=0$.在交点(0,0)处,$E=1,F=0,G=a^2$.

由 $u+v=0$ 得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-1$,由 $u-v=0$ 得 $\frac{\delta u}{\delta v}=1$.所以

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\delta u}{\delta v}+F\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+\frac{\delta u}{\delta v}\right)+G}{\sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2+2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+G}\sqrt{E\left(\frac{\delta u}{\delta v}\right)^2+2F\frac{\delta u}{\delta v}+G}}\\ &=\frac{-1+a^2}{1+a^2}.\end{aligned}$$

$$\theta=\arccos\frac{a^2-1}{a^2+1}.$$

5　解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\{x,y,axy\},\\ \boldsymbol{r}_x&=\{1,0,ay\},\\ \boldsymbol{r}_y&=\{0,1,ax\}.\end{aligned}$$

在交点(x_0,y_0)处,

$$E=1+a^2y_0^2,F=a^2x_0y_0,G=1+a^2x_0^2.$$

$$\cos\theta=\frac{F}{\sqrt{EG}}=\frac{a^2x_0y_0}{\sqrt{(1+a^2y_0^2)(1+a^2x_0^2)}}.$$

$$\theta=\arccos\frac{a^2x_0y_0}{\sqrt{(1+a^2y_0^2)(1+a^2x_0^2)}}.$$

6　解　对于 u - 曲线：$\mathrm{d}v=0,\mathrm{d}u\neq0$. 代入 $E\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\mathrm{d}v\delta v=0$中得

$$E\mathrm{d}u\delta u+F\mathrm{d}u\delta v=0,$$

因为 $\mathrm{d}u\neq0$，所以 u - 曲线的正交轨线的微分方程为：

$$E\delta u+F\delta v=0.$$

同理可得 v - 曲线的正交轨线的微分方程为

$$F\delta u+G\delta v=0.$$

7　证明　因为 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 不同时为 0，不妨设 $\mathrm{d}v\neq0$. 由已知条件有

$$P\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2+2Q\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+R=0.$$

设上面关于$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$的二次方程的两根分别为$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v},\frac{\delta u}{\delta v}$. 由韦达定理得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+\frac{\delta u}{\delta v}=-2\frac{Q}{P},$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\delta u}{\delta v}=\frac{R}{P}.$$

代入　$E\frac{\mathrm{d}u\delta u}{\mathrm{d}v\delta v}+F\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+\frac{\delta u}{\delta v}\right)+G=0$ 中得

$$E\frac{R}{P}+F\left(-2\frac{Q}{P}\right)+G=0,$$

即

$$ER-2FQ+GP=0.$$

8　证明　由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v$，设 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是 $\boldsymbol{r}_u$、$\boldsymbol{r}_v$交角的平分线. 则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}}.$$

所以 $$(\boldsymbol{r}_u \mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v \mathrm{d}v)\cdot\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{E}} = (\boldsymbol{r}_u \mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v \mathrm{d}v)\cdot\frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{G}}.$$

$$\frac{E\mathrm{d}u + F\mathrm{d}v}{\sqrt{E}} = \frac{E\mathrm{d}u + G\mathrm{d}v}{\sqrt{G}}.$$

由此式得

$$\frac{E^2\mathrm{d}u^2 + 2EF\mathrm{d}u\mathrm{d}v + F^2\mathrm{d}v^2}{E} = \frac{F^2\mathrm{d}u^2 + 2FG\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G^2\mathrm{d}v^2}{G}.$$

即 $$E(EG - F^2)\mathrm{d}u^2 = G(EG - F^2)\mathrm{d}v^2,$$

由于 $EG - F^2 > 0$,故所求二等分角轨线的微分方程为

$$E\mathrm{d}u^2 = G\mathrm{d}v^2.$$

9 已选入2.4的例题中.

10 解 先求球面的第一基本量.

$$\boldsymbol{r} = \{R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\}, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi.$$

$$\boldsymbol{r}_\theta = \{-R\sin\theta\cos\varphi, -R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta\},$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi = \{-R\cos\theta\sin\varphi, R\cos\theta\cos\varphi \quad 0\},$$

$$E = R^2, F = 0, G = R^2\cos^2\theta.$$

$$I = R^2\mathrm{d}\theta^2 + R^2\cos^2\theta\mathrm{d}\varphi^2,$$

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2\cos\theta.$$

$$\sigma = \iint_{\mathscr{D}} \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\pi} R^2\cos\theta\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi R^2\cos\theta\mathrm{d}\theta = 4\pi R^2.$$

11 解 先计算两曲面的第一基本形式:

$$\boldsymbol{r} = \{u\cos v, u\sin v, u + v\},$$

$$\boldsymbol{r}_u = \{\cos v, \sin v, 1\},$$

$$\boldsymbol{r}_v = \{-u\sin v, u\cos v, 1\},$$

$$E=2, F=1, G=1+u^2.$$

$$I=2du^2+2du\,dv+(1+u^2)dv^2.$$

$$r^*=\{t\cos\theta, t\sin\theta, \sqrt{t^2-1}\},$$

$$r_t^*=\left\{\cos\theta, \sin\theta, \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\right\},$$

$$r_\theta=\{-t\sin\theta, t\cos\theta, 0\},$$

$$E^*=\frac{2t^2-1}{t^2-1}, F^*=0, G^*=t^2.$$

$$I^*=\frac{2t^2-1}{t^2-1}dt^2+t^2d\theta^2.$$

将关系式

$$\theta=\arctan u+v,\quad d\theta=\frac{du}{1+u^2}+dv,$$

$$t=\sqrt{u^2+1},\qquad dt=\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}du,$$

代入 r^* 的第一基本形式 I^* 得

$$I^*=\frac{2(u^2+1)-1}{u^2+1-1}\cdot\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2du^2+[\sqrt{u^2+1}]^2\cdot\left[\left(\frac{du}{1+u^2}\right)^2+dv^2+\frac{2}{1+u^2}du\,dv\right]$$

$$=2du^2+2du\,dv+(1+u^2)dv^2.$$

由 $I=I^*$ 知两曲面等距等价.

12 解 由于 $r(u,v)=r^*(\theta,\varphi)$，所以

$$r_u=r_\theta^*\cdot\theta_u+r_\varphi^*\cdot\varphi_u,$$

$$r_v=r_\theta^*\cdot\theta_v+r_\varphi^*\cdot\varphi_v.$$

$$I^*=|dr^*|^2=[r_\theta^*d\theta+r_\varphi^*d\varphi]^2$$

$$=[\boldsymbol{r}_\theta^*(\theta_u\mathrm{d}u+\theta_v\mathrm{d}v)+\boldsymbol{r}_\varphi^*(\varphi_u\mathrm{d}u+\varphi_v\mathrm{d}v)]^2$$

$$=[(\boldsymbol{r}_\theta^*\theta_u+\boldsymbol{r}_\varphi^*\varphi_u)\mathrm{d}u+(\boldsymbol{r}_\theta^*\theta_v+\boldsymbol{r}_\varphi^*\varphi_v)\mathrm{d}v]^2$$

$$=[\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v]^2=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2$$

$$=I.$$

由于 $\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{r}_\theta^*\theta_u+\boldsymbol{r}_\varphi^*\varphi_u,\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{r}_\theta^*\theta_v+\boldsymbol{r}_\varphi^*\varphi_v$，所以

$$E=\boldsymbol{r}_u^2=(\boldsymbol{r}_\theta^*\theta_u+\boldsymbol{r}_\varphi^*\varphi_u)^2$$

$$=\boldsymbol{r}_\theta^*\cdot\boldsymbol{r}_\theta^*\theta_u^2+2\boldsymbol{r}_\theta^*\cdot\boldsymbol{r}_\varphi^*\theta_u\varphi_u+\boldsymbol{r}_\varphi^*\cdot\boldsymbol{r}_\varphi^*\varphi_u^2$$

$$=E^*\theta_u^2+2F^*\theta_u\varphi_u+G^*\varphi_u^2.$$

同理可得

$$F=E^*\theta_u\theta_v+F^*(\theta_u\varphi_v+\varphi_u\theta_v)+G^*\varphi_u\varphi_v,$$

$$G=E^*\theta_v^2+2F^*\theta_v\varphi_v+G^*\varphi_v^2.$$

13 由于曲面 $S:\boldsymbol{r}=\{u\cos\theta,u\sin\theta,u\}$，

$$E=\boldsymbol{r}_\theta^2=u^2,F=\boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}_u=0,G=\boldsymbol{r}_u^2=2.$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=\left(\cot\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)u,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta}=1.$$

所以弧长

$$S=\int_0^\pi\left[E\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+2F\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}+G\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^\pi\left[u^2+2\left(\cot^2\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)u^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta$$

$$=\sqrt{1+2\cot^2\frac{\beta}{\sqrt{2}}}\int_0^\pi u\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\sqrt{1+2\cot^2\frac{\beta}{\sqrt{2}}}\cdot\left(\mathrm{e}^{\pi\cot\frac{\beta}{\sqrt{2}}}-1\right)/\cot\frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{1+2\cot^2\frac{\beta}{\sqrt{2}}}\cdot\tan\frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{\pi\cot\frac{\beta}{\sqrt{2}}}-1\right)$$

$$=\sqrt{\tan^2\frac{\beta}{\sqrt{2}}+2}\left(e^{\pi\cot\frac{\beta}{\sqrt{2}}}-1\right).$$

$$\cos\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta},\boldsymbol{r}_u\right)=\frac{\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}\cdot\boldsymbol{r}_u}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}\right||\boldsymbol{r}_u|}$$

$$=\frac{\frac{du}{d\theta}}{\sqrt{u^2+2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2}}$$

$$=\frac{u\cot\frac{\beta}{\sqrt{2}}}{\sqrt{u^2+2u^2\cot^2\frac{\beta}{\sqrt{2}}}}$$

$$=\frac{\cot\frac{\beta}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1+2\cot^2\frac{\beta}{\sqrt{2}}}}=\text{const}.$$

14　解　由于 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,u\sin v,av\}$ 的 $E=1,F=0,G=u^2+a^2$. 曲面上曲线的微分方程为 $du=\sqrt{u^2+a^2}dv$,将其代入正交条件的方程

$$E+F\left(\frac{dv}{du}+\frac{\delta v}{\delta u}\right)+G\frac{dv}{du}\frac{\delta v}{\delta u}=0,$$

得

$$1+(u^2+a^2)\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\frac{\delta v}{\delta u}=0,$$

$$1+\sqrt{u^2+a^2}\frac{\delta v}{\delta u}=0,$$

$$\delta u=-\sqrt{u^2+a^2}\delta v.$$

积分得正交轨线族

$$u+\sqrt{u^2+a^2}=Ce^{-v}(C\text{ 为积分常数}).$$

15 解　因为

$$\boldsymbol{r}=\{R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\},$$

$$E=R^2\cos^2\theta, F=0, G=R^2, I=R^2\cos^2\theta\mathrm{d}\varphi^2+R^2\mathrm{d}\theta^2.$$

对于球面的子午线 $\varphi=\text{const}, \mathrm{d}\varphi=0$. 设所求曲线与子午线的夹角为 α, 则

$$\cos\alpha=\frac{R^2\mathrm{d}\theta\delta\theta}{\sqrt{R^2\cos^2\theta\delta\varphi^2+R^2\delta\theta^2}\sqrt{R^2\mathrm{d}\theta^2}}$$

$$=\frac{\delta\theta}{\sqrt{\cos^2\theta\delta\varphi^2+\delta\theta^2}}.$$

化简得

$$\tan^2\alpha=\frac{\cos^2\theta\delta\varphi^2}{\delta\theta^2}.$$

由于 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, 令　$\tan\alpha=\frac{1}{\beta}$, 则有

$$\frac{1}{\cos\theta}\delta\theta=\beta\delta\varphi.$$

积分所得的微分方程, 得

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=Ce^{\beta\varphi}\text{（}C\text{ 是积分常数）}.$$

16 解　因为

$$\boldsymbol{r}=\{(b+a\sin\varphi)\cos\theta, (b+a\sin\varphi)\sin\theta, a\cos\varphi\},$$

$$\boldsymbol{r}_\theta=\{-(b+a\sin\varphi)\sin\theta, (b+a\sin\varphi)\cos\theta, 0\},$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi=\{a\cos\varphi\cos\theta, a\cos\varphi\sin\theta, -a\sin\varphi\},$$

$$E=(b+a\sin\varphi)^2, F=0, G=a^2,$$

$$0<\theta\leqslant 2\pi, 0<\varphi\leqslant 2\pi,$$

表面积

$$\sigma=\iint_{\mathscr{D}}\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}a(b+a\sin\varphi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=4ab\pi^2.$$

17 证明 由于 $\boldsymbol{r}=\{w\cos v-w_v\sin v, w\sin v+w_v\cos v, u\}$.

$$\boldsymbol{r}_u=\{w_u\cos v-w_{uv}\sin v, w_u\sin v+w_{uv}\cos v, 1\},$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{-w\sin v-w_{vv}\sin v, w\cos v+w_{vv}\cos v, 0\}.$$

所以

$$E=1+(w_u^2+w_{uv}^2),$$

$$F=w_{uv}(w_{vv}+w),$$

$$G=(w+w_{vv})^2.$$

$$\boldsymbol{r}^*=\{a\cos v, a\sin v, u\},$$

$$\boldsymbol{r}_u^*=\{0,0,1\},$$

$$\boldsymbol{r}_v^*=\{-a\sin v, a\cos v, 0\}.$$

所以

$$E^*=1, F^*=0, G^*=a^2.$$

由题设应该有

$$\frac{E}{E^*}=\frac{F}{F^*}=\frac{G}{G^*}=\lambda=\text{const}.$$

即

$$\begin{cases}1+w_u^2+w_{uv}^2=\lambda^2, & (1)\\ w_{uv}(w_{vv}+w)=0, & (2)\\ (w+w_{vv})^2=\lambda^2a^2. & (3)\end{cases}$$

由(2)式知 $w_{uv}=0$,或 $w_{vv}+w=0$. 但当 $w_{vv}+w=0$ 时,可得 $\lambda=0$ 与第一式矛盾.

从而知 $w_{uv}=0$,则 $w=f(u,v)$是 u 的函数或者是 v 的函数,即 $w=f(u)$或 $w=g(v)$. 这样从方程 $\boldsymbol{r}=\{w\cos v-w_v\sin v, w\sin v+w_v\cos v, u\}$知曲面方程为

$$\boldsymbol{r}=\{f(u)\cos v, f(u)\sin v, u\},$$

它是旋转曲面.

习题 2.3

1 解 因为 $\boldsymbol{r}=\{\cosh u\cos v, \cosh u\sin v, v\}$,

$$\boldsymbol{r}_u = \{\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1\},$$
$$\boldsymbol{r}_v = \{-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0\},$$
$$\boldsymbol{r}_{uu} = \{\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0\},$$
$$\boldsymbol{r}_{uv} = \{-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0\},$$
$$\boldsymbol{r}_{vv} = \{-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, 0\}.$$

所以有

$$E = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u = \cosh^2 u, F = 0, G = \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v = \cosh^2 u.$$

因为

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} = \frac{1}{\cosh u}\{-\cos v, -\sin v, \sinh u\}.$$

所以

$$L = \boldsymbol{r}_{uu} \cdot \boldsymbol{n} = -1, M = \boldsymbol{r}_{uv} \cdot \boldsymbol{n} = 0, N = \boldsymbol{r}_{vv} \cdot \boldsymbol{n} = 1.$$

2 解 因为 $2x_3 = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$,

$$x_3 = \frac{5}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2,$$

$$p = \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 5x_1 + 2x_2,$$

$$q = \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 2x_1 + 2x_2,$$

$$r = \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} = 5,$$

$$s = \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} = 2,$$

$$t = \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2^2} = 2.$$

在原点有

$$p = 0, q = 0, r = 5, s = 2, t = 2.$$

所以

$E=1+p^2=1, F=pq=0, G=1+q^2=1,$

$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=5, M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=2, N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=2,$

$\mathrm{I}=\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2,$

$\mathrm{II}=5\mathrm{d}x_1^2+4\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+2\mathrm{d}x_2^2.$

3 证明：由于 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, bv\},$

$$\boldsymbol{r}_u=\{\cos v, \sin v, 0\},$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{-u\sin v, u\cos v, b\},$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\{0,0,0\},$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\{-\sin v, \cos v, 0\},$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=\{-u\cos v, -u\sin v, 0\}.$$

所以

$$E=1, F=0, G=u^2+b^2.$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}\{b\sin v, -b\cos v, u\}.$$

$$L=0, M=-b, N=0.$$

故

$$EN-2FM+GL=0.$$

4 解　因为 $\boldsymbol{r}=\{x, y, \frac{1}{2}(ax^2+by^2)\}$，所以

$$p=ax, q=by.$$

$$r=a, s=0, t=b.$$

在(0,0)点有

$$p_0=0, q_0=0, r_0=a, s_0=0, t_0=b,$$

$$E=1, F=0, G=1, L=a, M=0, N=b,$$

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2,$$

$$\mathrm{II}=a\mathrm{d}x^2+b\mathrm{d}y^2,$$

故在(0,0)点沿方向$(\mathrm{d}x:\mathrm{d}y)$的法曲率为：

$$k_n(\mathrm{d}x:\mathrm{d}y)=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{a\mathrm{d}x^2+b\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\frac{a\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2+b}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2+1}.$$

5 解 因为平面 π 与单位球面的交线为圆，其半径 $r=\sqrt{1-d^2}$，所以交线的曲率

$$k=\frac{1}{\sqrt{1-d^2}}.$$

因为球面 S 上任意点处沿任一切方向的法截线为 S 的大圆，所以 π 与 S 的交线上任一点处沿交线的切方向的法曲率 $k_n=1$.（取 $\boldsymbol{n}$ 指向球心）.

6 证明 对于球面 $\mathrm{I}=\{R\cos v\cos u, R\cos v\sin u, R\sin v\}$ 有

$$\mathrm{I}=R^2\cos^2 v\mathrm{d}u^2+R^2\mathrm{d}v^2,$$
$$\mathrm{II}=-(R\cos^2 v\mathrm{d}u^2+R\mathrm{d}v^2).$$

所以球面上任意点 (u,v) 沿任何方向 $(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$ 的法曲率为

$$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=-\frac{1}{R}.$$

又由于

$$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}=-\frac{1}{R}.$$

化简得

$$(RL+E)\mathrm{d}u^2+2(RM+F)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+(RN+G)\mathrm{d}v^2=0.$$

因为对任意 $\mathrm{d}u$、$\mathrm{d}v$ 都成立，故有

$$RL+E=RM+F=RN+G=0,$$

即

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}=-\frac{1}{R}.$$

7 解 因为 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, bv\}$，

$$E=1, F=0, G=u^2+b^2,$$

$$L=0, M=\frac{-b}{\sqrt{u^2+b^2}}, N=0.$$

由于 $L=N=0$,所以,正螺面的曲纹坐标网是渐近网,则一族渐近线是

$$\boldsymbol{r}=\{u_0\cos v, u_0\sin v, bv\},$$

这是螺旋线.另一族渐近线是

$$\boldsymbol{r}=\{u\cos v_0, u\sin v_0, bv_0\},$$

这是直线.

8 解　见3.3节例题.

9 证明:设空间曲线$(C):\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$.它的主法线曲面$\Sigma$为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)+t\boldsymbol{\beta}(s),$$

$$\boldsymbol{r}_s=\boldsymbol{\alpha}(s)+t(-k\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma})$$

$$=(1-kt)\boldsymbol{\alpha}+t\tau\boldsymbol{\gamma},$$

$$\boldsymbol{r}_t=\boldsymbol{\beta}(s).$$

曲面的法向量

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}_s\times\boldsymbol{r}_t=[(1-kt)\boldsymbol{\alpha}+t\tau\boldsymbol{\gamma}]\times\boldsymbol{\beta}$$

$$=(1-kt)\boldsymbol{\gamma}-t\tau\boldsymbol{\alpha}.$$

沿曲线(C):$t=0$,$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{\gamma}$.曲线的主法向量与曲面法向量的夹角 $\theta=\angle(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=\frac{\pi}{2}$.由于

$$k_n=k\cos\theta=k\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

所以曲线(C)是曲面Σ的渐近曲线.

10 证明　因为 $z=f(x)+g(y)$,所以

$$p=f'(x),\qquad s=0,$$

$$M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0.$$

曲面上的曲纹坐标网是共轭网.故曲线族 $x=$常数,$y=$常数构成共轭网.

11 解 对于正螺面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v, u\sin v, cv\}$,

$$E=1, F=0, G=u^2+c^2.$$

$$L=0, M=\frac{-c}{\sqrt{u^2+c^2}}, N=0.$$

曲率线的方程为

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}v^2 & -\mathrm{d}u\mathrm{d}v & \mathrm{d}u^2 \\ 1 & 0 & u^2+c^2 \\ 0 & \frac{-c}{\sqrt{u^2+c^2}} & 0 \end{vmatrix}=0,$$

化简得

$$-\mathrm{d}u^2+(u^2+c^2)\mathrm{d}v^2=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+c^2}}=\pm\mathrm{d}v.$$

积分得

$$\ln|u+\sqrt{u^2+c^2}|=\pm v+c.$$

所求曲率线为

$$\ln|u+\sqrt{u^2+c^2}|+v=c_1,$$

$$\ln|u+\sqrt{u^2+c^2}|-v=c_2.$$

12 解 见3.5节例题.

13 解 因为 $\boldsymbol{r}=\left\{\frac{a}{2}(u-v), \frac{b}{2}(u+v), \frac{uv}{2}\right\}$,

$$\boldsymbol{r}_u=\left\{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{v}{2}\right\},$$

$$\boldsymbol{r}_v=\left\{-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{u}{2}\right\},$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\{0,0,0\},$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\left\{0,0,\frac{1}{2}\right\},$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\{0,0,0\}.$$

所以 $E=\frac{1}{4}(a^2+b^2+v^2), F=\frac{1}{4}(-a^2+b^2+uv),$

$$G=\frac{1}{4}(a^2+b^2+u^2),$$

$$L=0, M=\frac{ab}{\sqrt{EG-F^2}}, N=0.$$

曲率线的微分方程为:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du dv & du^2 \\ \frac{1}{4}(a^2+b^2+v^2) & \frac{1}{4}(-a^2+b^2+uv) & \frac{1}{4}(a^2+b^2+u^2) \\ 0 & \frac{ab}{\sqrt{EG-F^2}} & 0 \end{vmatrix}=0.$$

化简为

$$\frac{du}{\sqrt{a^2+b^2+u^2}}=\pm\frac{dv}{\sqrt{a^2+b^2+v^2}}.$$

积分得

$$\ln|u+\sqrt{a^2+b^2+u^2}|\pm\ln|v+\sqrt{a^2+b^2+v^2}|=C.$$

14 证明 设曲面上曲率线 Γ 的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),$$

因为$\angle(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\gamma})=\theta$(定角),所以 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\gamma}=\cos\theta$.两边对 S 求微商得

$$\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}=0.$$

由罗德里格定理知 $\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\gamma}=0$,故有

$$\dot{\boldsymbol{n}}\cdot(-\tau\boldsymbol{\beta})=0.$$

若 $\tau=0$,则曲线 Γ 为一平面曲线.

若 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$,则 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{\beta}$,即 Γ 是渐近线,又由已知 Γ 是曲率线,由于

$$d\boldsymbol{n}=-k_N d\boldsymbol{r},$$

所以 $d\boldsymbol{n}=0$,$\boldsymbol{n}$ 为常向量.

$$d(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})=d\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}=0,$$

所以 $$d(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})=0,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=c.$$
即 Γ 为平面曲线.

15 证明 对于曲率线 $\Gamma:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,由于 $\boldsymbol{n}$ 垂直于切平面,$\boldsymbol{\gamma}$ 垂直于 Γ 的密切平面.依题意 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 成定角.由上题知:Γ 是平面曲线.

16 解 见 3.6 节例题.

17 解 由抛物面 $z=a(x^2+y^2)$知

$$p=2ax,q=2ay,r=2a,s=0,t=2a.$$

在(0,0)点

$$p_0=0,q_0=0,r_0=2a,s_0=0,t_0=2a,$$
$$E=1,F=0,G=1,L=2a,M=0,N=2a.$$

代入主曲率公式,得

$$\begin{vmatrix} 2a-k_N & 0 \\ 0 & 2a-k_N \end{vmatrix}=0.$$

主曲率为 $k_1=2a,k_2=2a$.

18 证明 由欧拉公式知

$$k_n=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta,$$
$$k_n^*=k_1\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+k_2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$=k_1\sin^2\theta+k_2\cos^2\theta,$$

所以 $k_n+k_n^*=k_1+k_2=\text{const}.$

19 证明 因为 $k_n=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta$,对于渐近曲线,$k_n=0$,所以

$$k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta=0,$$
$$\tan\theta=\pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}},$$

渐近方向间的夹角 $\varphi=2\theta$.所以

$$\frac{k_1}{k_2}=-\tan^2\frac{\varphi}{2}=\text{const}$$

20 解 见3.6节例题.

21 解 因为 $z=axy$,所以

$$p=ay,q=ax,r=0,s=a,t=0.$$

在(0,0)点有

$$p_0=0,q_0=0,r_0=0,s_0=a,t_0=0,$$
$$E=1,F=0,G=1,$$
$$L=0,M=a,N=0.$$

曲面在(0,0)点的平均曲率 $H=0$,高斯曲率 $K=-a^2$.

22 证明 因为 $H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=0$,所以

$$k_1=-k_2.$$

当 $k_1=-k_2=0$ 时为平点.

当 $k_1=-k_2\neq 0$ 时,$K=k_1\cdot k_2=-k_1^2<0$,为双曲点.

23 证法一 由于

$$H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}=0,$$

所以
$$LG-2MF+NE=0,$$

$$E\left(\frac{N}{L}\right)+F\left(-\frac{2M}{L}\right)+G=0. \tag{1}$$

对于渐近线

$$L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2=0,$$

有

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2+\frac{2M}{L}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)+\frac{N}{L}=0.$$

于是有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+\dfrac{\delta u}{\delta v}=-\dfrac{2M}{L},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\dfrac{\delta u}{\delta v}=\dfrac{N}{L},\end{cases} \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式,得

$$E\mathrm{d}u\delta u+F(\mathrm{d}u\delta v+\mathrm{d}v\delta u)+G\mathrm{d}v\delta v=0.$$

此式说明两个方向$(\mathrm{d}u:\mathrm{d}v)$,$(\delta u:\delta v)$互相垂直,故曲面上的渐近网构成正交网.

证法二　由

$$H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}=0,$$

得

$$LG-2MF+NE=0. \tag{1}$$

选取坐标网为渐近网,则 $L=N=0$.由(1)式可得

$$-MF=0.$$

因为 $M\neq0$(非脐点),所以 $F=0$.坐标网为正交网,即渐近网是正交网.

证法三　由

$$H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}=\frac{k_1+k_2}{2}=0,$$

得

$$k_1=-k_2,$$

$$\tan\theta=\pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}=\pm1.$$

所以

$$\theta=\pm\frac{\pi}{4},$$

$$2\theta=\pm\frac{\pi}{2}.$$

即渐近线的夹角为$\frac{\pi}{2}$,渐近网为正交网.

24　解　因为

$$\boldsymbol{r}=\{(b+a\cos\varphi)\cos\theta,(b+a\cos\varphi)\sin\theta,a\sin\varphi\},$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi=\{-a\sin\varphi\cos\theta,-a\sin\varphi\sin\theta,a\cos\varphi\},$$

$$\boldsymbol{r}_\theta=\{-(b+a\cos\varphi)\sin\theta,(b+a\cos\varphi)\cos\theta,0\},$$

$$\boldsymbol{r}_{\varphi\varphi}=\{-a\cos\varphi\cos\theta,-a\cos\varphi\sin\theta,-a\sin\varphi\},$$

$$\boldsymbol{r}_{\varphi\theta}=\{a\sin\varphi\sin\theta,-a\sin\varphi\cos\theta,0\},$$

$$\boldsymbol{r}_{\theta\theta}=\{-(b+a\cos\varphi)\cos\theta,-(b+a\cos\varphi)\sin\theta,0\}.$$

则 $E=a^2,F=0,G=(b+a\cos\varphi)^2,$

$L=a,M=0,N=(b+a\cos\varphi)\cos\varphi.$

因为$b>a>0$,又$-1\leqslant\cos\varphi<1$.所以

$$a(b+a\cos\varphi)>0.$$

高斯曲率

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{a(b+a\cos\varphi)\cos\varphi}{a^2(b+a\cos\varphi)^2}=\frac{\cos\varphi}{a(b+a\cos\varphi)}.$$

当 $\left.\begin{array}{l}0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{3\pi}{2}<\varphi<2\pi\end{array}\right\}$时,$K>0$,是椭圆点;

当 $\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{3}{2}\pi$时,$K<0$,是双曲点;

当 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$或$\varphi=\dfrac{3}{2}\pi$ 时,$K=0$,是抛物点.

25 证明 因为$\boldsymbol{r}=\{g(t)\cos\theta,g(t)\sin\theta,f(t)\}$.

$\boldsymbol{r}_t=\{g'(t)\cos\theta,g'(t)\sin\theta,f'(t)\},$

$\boldsymbol{r}_\theta=\{-g(t)\sin\theta,g(t)\cos\theta,0\}.$

$E=[g'(t)]^2+[f'(t)]^2,F=0,G=[g(t)]^2,$

$I=([g'(t)]^2+[f'(t)]^2)\mathrm{d}t^2+[g(t)]^2\mathrm{d}\theta^2.$

将上式改写成

$$I=g^2(t)\left(\frac{g'^2+f'^2}{g^2}\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}\theta^2\right).$$

作参数变换

$$u=\int\frac{\sqrt{g'^2+f'^2}}{g}\mathrm{d}t,v=\theta.$$

则

$$\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{g'^2+f'^2}}{g}\mathrm{d}t,v=\theta$$

第一基本形式变为

$$\mathrm{I} = g^2(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2).$$

26 证明 设 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$分别是曲面 S_1、S_2的单位法向量. 设 $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = \cos\varphi$. S_1与 S_2的交线(C)是 S_1的一条曲率线.

先证明充分性，即证明当 $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}$，则$(C)$是 S_2的曲率线.

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_1}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{n}_2 + \boldsymbol{n}_1 \cdot \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_2}{\mathrm{d}s}$，根据罗德理格定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_1}{\mathrm{d}s} = -k_n \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s},$$

有

$$-k_n \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{n}_2 + \boldsymbol{n}_1 \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_2}{\mathrm{d}s} = 0,$$

但是 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\alpha}$，且垂直于 $\boldsymbol{n}_2$于是有 $\boldsymbol{n}_1 \cdot \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_2}{\mathrm{d}s} = 0$.

即 $\boldsymbol{n}_1 \perp \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_2}{\mathrm{d}s}$，又由于$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_2}{\mathrm{d}s} \perp \boldsymbol{n}_2$，所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_2}{\mathrm{d}s} /\!/ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_2}{\mathrm{d}s} = \lambda \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}.$$

由罗德里格定理知(C)也是 S_2的曲率线.

下面证明必要性.

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_1}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{n}_2 + \boldsymbol{n}_1 \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_2}{\mathrm{d}s}.$$

因(C)是 S_1的曲率线，又是(S_2)的曲率线，所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_1}{\mathrm{d}s} = \lambda_1 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_2}{\mathrm{d}s} = \lambda_2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s},$$

又$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \perp \boldsymbol{n}_1$，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \perp \boldsymbol{n}_2$，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2)=0,\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=\cos\varphi=\text{const}.$$

27　解　根据曲面上渐近线的性质可知：沿曲面的渐近线的密切平面与曲面的切平面重合，于是有

$$\boldsymbol{n}=\pm\boldsymbol{\gamma}.$$

两边对 s 求微商，

$$\dot{\boldsymbol{n}}=\pm\dot{\boldsymbol{\gamma}}=\pm(-\tau\boldsymbol{\beta})=\mp(\tau\boldsymbol{\beta}).$$

所以

$$\dot{\boldsymbol{n}}\cdot\dot{\boldsymbol{n}}=\tau^2.$$

即沿渐近线　$\mathrm{III}=\mathrm{d}\boldsymbol{n}^2=\tau^2,$

$\mathrm{I}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}^2=\boldsymbol{\alpha}^2=1,$

$\mathrm{II}=0.$

代入公式　$\mathrm{III}-2H\,\mathrm{II}+K\,\mathrm{I}=0,$

得　$\tau^2+K=0.$

即　$\tau=\pm\sqrt{-K}.$

28　证明　对于曲面的球面表示 $\boldsymbol{n}(u,v)$，有

$$\boldsymbol{n}_u\times\boldsymbol{n}_v=K(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v).$$

对于简单曲面，$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq0$. 对于曲面上的非抛物点，$K\neq0$. 所以

$$\boldsymbol{n}_u\times\boldsymbol{n}_v\neq0.$$

所以曲面上的点与其球面象上的点是一一对应的.

29　证　若曲面是平面或球面，$k_1=k_2$，所以

$$H^2=\left[\frac{1}{2}(k_1+k_2)\right]^2=k_1^2=k_2^2=k_1\cdot k_2=K.$$

反之，若 $H^2=K$，则$\frac{1}{2}(k_1+k_2)^2=k_1\cdot k_2$，即

$$(k_1-k_2)^2=0.$$

从而 $k_1=k_2$，曲面为平面或球面.

30　证　对于曲面 $\boldsymbol{r}=\{u\cos\theta,u\sin\theta,\ln u\}$，有

$$E=1+\frac{1}{u^2},F=0,G=u^2,K=\frac{-1}{1+u^2}.$$

对于曲面 $\boldsymbol{r}^* = \{u^*\cos\theta^*, u^*\sin\theta^*, u^*\}$，有

$$E^* = 1, F^* = 0, G^* = 1 + u^{*2}, K^* = \frac{-1}{1+u^{*2}}.$$

因此两曲面在对应点 $u = u^*, \theta = \theta^*$ 有相等的高斯曲率.

假定曲面 $\boldsymbol{r}(\Gamma,\theta)$ 与 $\boldsymbol{r}^*(u^*,\theta^*)$ 等距等价，则存在曲面 $\Gamma(u,\theta)$ 与 $\boldsymbol{r}^*(u^*,\theta^*)$ 之间的一一映射，$\sigma: u^* = u^*(u,\theta), \theta^* = \theta^*(u,\theta)$ 使其在对应点有

$$E^* = E, F^* = F, G^* = G.$$

且
$$\det\frac{\partial(u^*,\theta^*)}{\partial(u,\theta)} = \begin{vmatrix} u_u^* & u_\theta^* \\ \theta_u^* & \theta_\theta^* \end{vmatrix} \neq 0.$$

由 $K = K^*$ 得 $1 + u^{*2} = 1 + u^2$，即 $u^* = \pm u$，$u_\theta^* = 0$. 若 $\det\dfrac{\partial(u^*,\theta^*)}{\partial(u,\theta)} \neq 0$，当且仅当 $\theta_\theta^* \neq 0$.

另一方面，在参数变换下，第一基本量间的变换关系式为

$$E = E^* u_u^{*2} + 2F^* u_u^*\theta_u + G^*\theta_u^{*2},$$

$$F = E^* u_u^* u_\theta^* + F^*(u_u^*\theta_\theta^* + \theta_u^* u_\theta^*) + G^*\theta_u^*\theta_\theta^*,$$

$$G = E^* u_\theta^{*2} + 2F^* u_\theta^*\theta_\theta^* + G^*\theta_\theta^{*2}.$$

所以有

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{1}{u^2} = 1 + (1+u^2)\theta_u^{*2}, \\ \theta_u^*\theta_\theta^* = 0, \\ (1+u)\theta_\theta^{*2} = 0. \end{cases}$$

由前二式得 $\theta_\theta^{*2} = 0$，这与参数变换 $\sigma: u^* = u^*(u,\theta), \theta^* = \theta^*(u,\theta)$ 是一一变换矛盾，所以两曲面不等距等价.

31 解 因为曲面 $\boldsymbol{r} = \left\{x, y, \dfrac{1}{xy}\right\}$.

$$\boldsymbol{r}_x = \left\{1, 0, -\frac{1}{x^2y}\right\}, \quad \boldsymbol{r}_y = \left\{0, 1, -\frac{1}{xy^2}\right\}.$$

$$\boldsymbol{r}_{xx}=\left\{0,0,\frac{2}{x^{3}y}\right\},\quad \boldsymbol{r}_{xy}=\left\{0,0,\frac{1}{x^{2}y^{2}}\right\}.$$

$$\boldsymbol{r}_{yy}=\left\{0,0,\frac{2}{xy^{3}}\right\}.$$

所以 $$E=1+\frac{1}{x^{4}y^{2}},F=\frac{1}{x^{3}y^{3}},G=1+\frac{1}{x^{2}y^{4}},$$

$$L=\frac{2}{x^{3}y\sqrt{EG-F^{2}}},M=\frac{1}{x^{2}y^{2}\sqrt{EG-F^{2}}},N=\frac{2}{xy^{3}\sqrt{EG-F^{2}}}.$$

由曲面脐点的定义,得

$$\frac{2}{x^{4}y^{2}+1}=1=\frac{2}{x^{2}y^{4}+1},$$

即 $$x^{4}y^{2}=x^{2}y^{4}=1.$$

解得 $$x=\pm y,x=\pm 1.$$

所求脐点的曲纹坐标为 $A(1,1),B(-1,-1),C(-1,1),D(1,-1)$.诸点在空间的坐标为 $A(1,1,1),B(1,-1,-1),C(-1,1,-1),D(-1,-1,1)$.

32 证 设曲线(C):$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,其切线曲面的方程为

$$\boldsymbol{r}^{*}=\boldsymbol{r}(s)+v\boldsymbol{\alpha}(s),$$

则

$$\boldsymbol{r}_{s}^{*}=\boldsymbol{\alpha}(s)+v(\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s))=\boldsymbol{\alpha}(s)+vk\boldsymbol{\beta},$$

$$\boldsymbol{r}_{v}^{*}=\boldsymbol{\alpha}(s),$$

$$\boldsymbol{r}_{ss}^{*}=-k^{2}v\boldsymbol{\alpha}+(v\dot{k}+k)\boldsymbol{\beta}+vk\tau\boldsymbol{\gamma},$$

$$\boldsymbol{r}_{sv}^{*}=k\boldsymbol{\beta},$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}^{*}=0,$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_{s}^{*}\times\boldsymbol{r}_{v}^{*}}{|\boldsymbol{r}_{s}^{*}\times\boldsymbol{r}_{v}^{*}|}=\frac{-vk}{|vk|}\boldsymbol{\gamma}.$$

$$L=-|vk|\tau,M=0,N=0,$$

由于 $LN-M^{2}\equiv 0$,所以曲面上的点都是抛物点.

33 解 因为 $\boldsymbol{r}=\{u,v,u^{2}+v^{3}\}$,

$$\boldsymbol{r}_u=\{1,0,2u\},\boldsymbol{r}_v=\{0,1,3v^2\},$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\{0,0,2\},\boldsymbol{r}_{vv}=\{0,0,6v\},$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\{0,0,0\},$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{4u^2+9v^2+1}}\{-2u,-3v^2,1\}.$$

$$L=\frac{2}{\sqrt{4u^2+9v^2+1}},M=0,N=\frac{6v}{\sqrt{4u^2+9v^2+1}},$$

$$LN-M^2=\left[\frac{1}{\sqrt{4u^2+9v^2+1}}\right]^2\cdot 12v.$$

当 $v>0$ 时，$LN-M^2>0,K>0$ 是椭圆点；

当 $v=0$ 时，$LN-M^2=0,K=0$ 是抛物点；

当 $v<0$ 时，$LN-M^2<0,K<0$ 是双曲点.

34 解 因为 $\boldsymbol{r}=\{v^3,u^2,u+v\}$,

$$\boldsymbol{r}_u=\{0,2u,1\},\boldsymbol{r}_v=\{3v^2,0,1\},$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\{0,2,0\},\boldsymbol{r}_{uv}=\{0,0,0\},$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=\{6v,0,0\}.$$

$$L=\frac{6v^2}{\sqrt{EG-F^2}},M=0,N=\frac{12uv}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

令

$$LN-M^2=\frac{72uv^2}{\sqrt{EG-F^2}}=0.$$

解得 $u=0,v=0$. 所求曲面的抛物点为

$$\boldsymbol{r}_1=\{v^3,0,v\},\boldsymbol{r}_2=\{0,u^2,u\}.$$

它们是 xz 平面和 yz 平面上的立方抛物线与抛物线.

35 解 因为 $\boldsymbol{r}=\{u,v,u^2-v^2\}$,

$$\boldsymbol{r}_u=\{1,0,2u\};\boldsymbol{r}_v=\{0,1,-2v\},$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\{0,0,2\},\boldsymbol{r}_{vv}=\{0,0,-2\},$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\{0,0,0\}.$$

$$E=1+4u^2,F=-4uv,G=1+4v^2,$$

$$L=\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}},M=0,N=\frac{-2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}.$$

当 $u=0,v=0$ 时，

$$E=1,F=0,G=1,L=2,M=0,N=-2.$$

代入法曲率公式得

$$k_n=\frac{2(\mathrm{d}u^2-\mathrm{d}v^2)}{\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}.$$

令 $\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2=1$，则 $\mathrm{d}u=\cos\varphi,\mathrm{d}v=\sin\varphi$，则

$$k_n=2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=2\cos 2\varphi.$$

此即 k_n 在(0,0)的邻域内的变化规律.

36 解　因为 $\boldsymbol{r}=\{u,v,u^2+v^2\}$.

$$\boldsymbol{r}_u=\{1,0,2u\},\boldsymbol{r}_v=\{0,1,2v\},$$

$$E=1+4u^2,F=4uv,G=1+4v^2,$$

$$L=2(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$M=0,N=2(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

由曲线的方程得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=2t,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=1.$$

在 $t=1$ 点，$E=5,F=4,G=5,L=\frac{2}{3},M=0,N=\frac{2}{3}$.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=2,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=1.$$

将所求结果代入法曲率公式，得

$$k_n=\frac{10}{123}.$$

37 解　因为 $\boldsymbol{r}=\{u,v,u^2+v^2\}$，由上题知：

$E=1+4u^2,F=4uv,G=1+4v^2$,

$L=2(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}},M=0,N=2(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}}$.

在(1,1)点，　　　$E=5,F=4,G=5$,

$$L=\frac{2}{3},M=0,N=\frac{2}{3}.$$

代入主方向的方程,得

$$-\frac{8}{3}\mathrm{d}u^2+\frac{8}{3}\mathrm{d}v^2=0,$$

即
$$(\mathrm{d}u+\mathrm{d}v)(\mathrm{d}u-\mathrm{d}v)=0.$$

(1,1)点的主方向为

$$\mathrm{d}u_1:\mathrm{d}v_1=1:-1,\mathrm{d}u_2:\mathrm{d}v_2=1:1.$$

38 证明 设两相交曲面的单位法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$.由公式 $k_n=\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\cdot\boldsymbol{n}$ 得

$$k_1\boldsymbol{n}_2=(\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{n}_1)\cdot\boldsymbol{n}_2=k(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{n}_2,$$
$$k_2\boldsymbol{n}_1=(\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{n}_2)\cdot\boldsymbol{n}_1=k(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{n}_1.$$

其中 k_1、k_2分别为交线在 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$方向上的法曲率.置

$$k_1\boldsymbol{n}_2-k_2\boldsymbol{n}_1=k[(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{n}_2-(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{n}_1]$$
$$=k[(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)\times\boldsymbol{\beta}].$$

于是有

$$(k_1\boldsymbol{n}_2-k_2\boldsymbol{n}_1)\cdot(k_1\boldsymbol{n}_2-k_2\boldsymbol{n}_1)$$
$$=k^2[(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)\times\boldsymbol{\beta}]\cdot[(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)\times\boldsymbol{\beta}]$$
$$=k^2[(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)\cdot(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)-((\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)\cdot\boldsymbol{\beta})^2].$$

由于$(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)/\!/\boldsymbol{\alpha}$,从而$(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)\perp\boldsymbol{\beta}$.故有

$$(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)\cdot\boldsymbol{\beta}=0,$$
$$(k_1\boldsymbol{n}_2-k_2\boldsymbol{n}_1)\cdot(k_1\boldsymbol{n}_2-k_2\boldsymbol{n}_1)$$
$$=k^2(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)\cdot(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)$$
$$=k^2|\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2|^2.$$

把上式左端展开得

$$k_1^2(\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{n}_2)-2k_1k_2(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2)+k_2^2(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_1)$$
$$=k^2|\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2|^2,$$

即
$$k_1^2-2k_1k_2\cos\theta+k_2^2=k^2\sin^2\theta.$$

39 证 若曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$的所有方向都是渐近方向，则对于任意的 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 有：

$$\mathrm{II}=-\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}=0.$$

由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\neq0$，所以有 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}=0$，故 $\boldsymbol{n}$ 是常向量.

由 $\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}=0$，对 u 积分，得

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=f(v).$$

再由 $\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}=0$，关于参数 v 积分 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=f(v)$，有 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_v=f'(v)$. 由于 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{r}_v$，得

$$f'(v)=0,\text{即}\quad f(v)=C.$$

于是

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=C,$$

这是平面的向量式方程. 可知曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$是平面.

40 证 设曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$在任一点 P 的一对共轭方向为

$$P(u,v)\mathrm{d}u+Q(u,v)\mathrm{d}v=0,$$

与

$$(LQ-MP)\delta u+(MQ-NP)\delta v=0.$$

设 R_1与 R_2是这对共轭方向的法曲率半径，则由题意

$$R_1+R_2=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$$

$$=\frac{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}{L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2}+\frac{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}{L\delta u^2+2M\delta u\delta v+N\delta v^2}$$

$$=\frac{EQ^2-2FPQ+GP^2}{LQ^2-2MPQ+NP^2}+$$

$$\frac{E(MQ-NP)^2-2F(MQ-NP)(LQ-MP)+G(LQ-MP)^2}{L(MQ-NP)^2-2M(MQ-NP)(LQ-MP)+N(LQ-MP)^2}$$

$$=\frac{(NE-2MF+LG)(LQ^2-2MPQ+NP^2)}{(LN-M^2)(LQ^2-2MPQ+NP^2)}$$

$$=\frac{NE-2MF+LG}{LN-M^2}$$

$$=\frac{2H}{K}.$$

习题 2.4

1 证明:因为 $r=\left\{u^2+\frac{1}{3}v,2u^3+uv,u^4+\frac{2}{3}u^2v\right\}$可以改写成

$$r=\{u^2,2u^3,u^4\}+v\left\{\frac{1}{3},u,\frac{2}{3}u^2\right\}$$
$$=a(u)+vb(u).$$

所以
$$a'(u)=\{2u,6u^2,4u^3\},$$
$$b'(u)=\left\{0,1,\frac{4}{3}u\right\},$$
$$(b',a',b)=0,$$

所以曲面是可展曲面.

2 证明　因为 $r=\{\cos v-(u+v)\sin v,\sin v+(u+v)\cdot\cos v,u+2v\}$可以改写成

$$r=\{\cos v-v\sin v,\sin v+v\cos v,2v\}+u\{-\sin v,\cos v,1\}$$
$$=a(v)+ub(v).$$

则 $$a'(v)=\{-2\sin v-v\cos v,2\cos v-v\cos v,2\},$$
$$b'(v)=\{-\cos v,-\sin v,0\},$$
$$(a',b',b)=0,$$

所以此曲面是可展曲面.

3 证明:因为 $r=\{u\cos v,u\sin v,av+b\}$可以改写成

$$r=\{0,0,av+b\}+u\{\cos v,\sin v,0\}$$
$$=a(v)+ub(v).$$

则
$$a'(v)=\{0,0,a\},$$
$$b'(v)=\{-\sin v,\cos v,0\},$$
$$(a',b,b')=a\neq 0,$$

故曲面不可展.

4 证明　设有空间挠曲线 $a=a(s)$,由它生成的主法线曲

面的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(s)+v\boldsymbol{\beta}(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}(s)=\boldsymbol{\alpha}(s),\dot{\boldsymbol{\beta}}(s)=-k\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma},$$

$$(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},-k\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma})=\tau\neq0.$$

故曲面不可展.

曲线的副法线曲面为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(s)+v\boldsymbol{\gamma}(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)=-\tau\boldsymbol{\beta},$$

$$(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},-\tau\boldsymbol{\beta})=\tau\neq0.$$

故曲面不可展.

5 解　平面族 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-z\sin\alpha=1$.

$$\begin{cases}F(x,y,z,\alpha)=x\cos\alpha+y\sin\alpha-z\sin\alpha-1=0,\\ F'_\alpha=-x\sin\alpha+y\cos\alpha-z\cos\alpha=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\cos\alpha+(y-z)\sin\alpha-1=0,\\ -x\sin\alpha+(y-z)\cos\alpha=0,\end{cases}$$

解得　$x^2+(y-z)^2=1.$

曲面上的点都是正常点,故上式便是所求包络的方程.

6 解　平面族 $a^2x+2ay+2z=2a$.

$$\begin{cases}F(x,y,z,a)=a^2x+2ay+2z-2a=0,\\ F_a(x,y,z,a)=2ax+2y-2=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}a^2x+2ay+2z-2a=0,\\ a=\dfrac{1-y}{x}.\end{cases}$$

解得　$2xz-y^2+2y-1=0.$

所求包络是锥面　$2xz-(y-1)^2=0.$

7 证明　设柱面的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u).$$

其中 $\boldsymbol{b}(u)$为常向量. $\boldsymbol{b}'(u)=0$. 所以

$$(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0,$$

柱面是可展曲面.

设锥面的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u),$$

其中 $\boldsymbol{a}(u)$为常向量, $\boldsymbol{a}'(u)=0$. 故

$$(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0,$$

锥面是可展面.

设曲线的切线曲面为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u).$$

其中 $\boldsymbol{a}'/\!/\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}'=\lambda\boldsymbol{b}$, 故$(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')=0$, 所以曲面是可展曲面.

8 证明:因为 $\boldsymbol{r}_{uu}=\boldsymbol{r}_{uv}=0$, 所以曲面的第二基本量 $L=M=0$. 可见 $K=0$. 故曲面为可展面,它的方程可写成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u),$$

$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{a}'+v\boldsymbol{b}',\qquad \boldsymbol{r}_{uu}=\boldsymbol{a}''+v\boldsymbol{b}''=0,$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\boldsymbol{b}'=0,$$

则 $\boldsymbol{b}'=0$, $\boldsymbol{b}=$常向量,所以曲面是柱面.

9 **解** 设挠曲线(C): $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(s)$, 其主法线曲面的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(s)+v\boldsymbol{\beta}(s).$$

$$\boldsymbol{a}'(s)=\boldsymbol{\alpha}(s),\ \boldsymbol{b}'(s)=\dot{\boldsymbol{\beta}}(s)=-k\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma},$$

$$\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{\alpha}\cdot(-k\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma})=-k,$$

$$\boldsymbol{b}'^2=k^2+\tau^2.$$

腰曲线的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(s)-\frac{\boldsymbol{a}'(s)\cdot\boldsymbol{b}'(s)}{[\boldsymbol{b}'(s)]^2}\boldsymbol{b}(s)$$

$$=\boldsymbol{a}(s)+\frac{k}{k^2+\tau^2}\boldsymbol{\beta}(s).$$

其中 k、τ 分别是曲线 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(s)$的曲率和挠率.

10 证明 设可展曲面的方程为

$$r = a(t) + vb(t)\text{，其中} |b| = 1,$$

其上的直线为 v－曲线.

$$r_t = a' + vb',\ r_v = b,$$

$$n = \frac{(a' + vb') \times b}{|(a' + vb') \times b|} = \frac{a' \times b + vb' \times b}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

由于曲面可展，所以由 $(a', b, b') = 0$ 推出

$$(a' \times b) /\!/ (b' \times b),$$

n 可视为 $a' \times b$ 上的单位向量，与 v 无关，所以有

$$\frac{dn}{dv} = 0.$$

即 v－曲线是曲率线. 由于曲面上的直线都是曲面渐近线，所以可展曲面的直母线既是曲面的渐近线又是曲率线.

习题 2.5

1 解　由于 $dS^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$，即 $E(\rho,\theta) = 1, F(\rho,\theta) = 0, G(\rho,\theta) = \rho^2$，所以

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \Gamma_{11}^2 = 0, \Gamma_{12}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{\rho}, \Gamma_{22}^1 = \rho, \Gamma_{22}^2 = 0.$$

2 证明　由于

$$\mu_i^j = -\sum_k g^{jk} L_{ik},$$

则有

$$\mu_1^1 = \frac{-LG + MF}{EG - F^2}, \quad \mu_1^2 = \frac{LF - ME}{EG - F^2},$$

$$\mu_2^1 = \frac{NF - MG}{EG - F^2}, \quad \mu_2^2 = \frac{-NE + MF}{EG - F^2}.$$

$$\det(\mu_i^j) = \frac{(-LG + MF)(-NE + MF)}{(EG - F^2)^2} - \frac{(LF - ME)(NF - MG)}{(EG - F^2)^2}$$

$$= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K.$$

3　证明　由于

$$\mu_1^1=\frac{-LG+MF}{EG-F^2},\quad \mu_2^2=\frac{-NE+MF}{EG-F^2},$$

所以 $\frac{1}{2}(\mu_1^1+\mu_2^2)=\frac{1}{2}\frac{-LG+MF-NE+MF}{EG-F^2}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2MF-LG-NE}{EG-F^2}\right)=-H.$$

4　证明　(1) 由第一类黎曼曲率张量的定义

$$R_{ijk}^l=\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma_{ik}^l}{\partial u^j}+\sum_p(\Gamma_{ij}^p\Gamma_{pk}^l-\Gamma_{ik}^p\Gamma_{pj}^l),$$

有 $R_{mijk}=\sum_l g_{ml}R_{ijk}^l$

$$=\sum_l g_{ml}\left[\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma_{ik}^l}{\partial u^j}+\sum_p(\Gamma_{ij}^p\Gamma_{pk}^l-\Gamma_{ik}^p\Gamma_{pj}^l)\right]. \tag{1}$$

由于

$$[ij,m]=\sum_l\Gamma_{ij}^l g_{lm},$$

所以

$$\frac{\partial[ij,m]}{\partial u^k}=\sum_l\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}g_{ml}+\sum_l\frac{\partial g_{lm}}{\partial u^k}\Gamma_{ij}^l.$$

即

$$\sum_l g_{ml}\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}=\frac{\partial[ij,m]}{\partial u^k}-\sum\frac{\partial g_{lm}}{\partial u^k}\Gamma_{ij}^l.$$

代入(1)式得

$$R_{mijk}=\frac{\partial[ij,m]}{\partial u^k}-\frac{\partial[ik,m]}{\partial u^j}-\sum\frac{\partial g_{lm}}{\partial u^k}\Gamma_{ij}^l+\sum_l\frac{\partial g_{ml}}{\partial u^j}\Gamma_{ik}^l+\sum_p[pk,m]\Gamma_{ij}^p-\sum_p[p_j,m]\Gamma_{ik}^p. \tag{2}$$

由于

$$[ij,m]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right),$$

$$[ik,m]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{km}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^m}\right),$$

$$\frac{\partial g_{ml}}{\partial u^k}=[ik,m]+[mk,l],$$

$$\frac{\partial g_{ml}}{\partial u^j}=[lj,m]+[mj,l],$$

代入(2)式得

$$R_{mijk}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^k}+\right.$$

$$\left.\frac{\partial g_{km}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^m}\right)-([lk,m]+[mk,l])\Gamma_{ij}^l+$$

$$([lj,m]+[mj,l])\Gamma_{ik}^l+[pk,m]\Gamma_{ij}^p-[p_j,m]\Gamma_{ik}^p,$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial u^i\partial u^k}+\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^j\partial u^k}-\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^m\partial u^k}-\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial u^i\partial u^j}\right)+$$

$$\sum_l[l_j,m]\Gamma_{ik}^l+\sum_l[mj,l]\Gamma_{ik}^l+\sum_p[pk,m]\Gamma_{ij}^p-$$

$$\sum_p[p_j,m]\Gamma_{ik}^p-\sum_l[lk,m]\Gamma_{ij}^l-\sum_l[mk,l]\Gamma_{ij}^l$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial u^i\partial u^k}+\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial u^j\partial u^k}-\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^m\partial u^k}-\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial u^i\partial u^j}\right)+$$

$$\sum_p[mj,p]\Gamma_{ik}^p-\sum_p[mk,p]\Gamma_{ij}^p.$$

5　证明　对于 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面来说，R_{mijk} 中的本质分量只有一个，即

$$R_{1212}=-K_g.(g=g_{11}g_{22}-g_{21}g_{21}).$$

因此可以一般地表示为

$$R_{mijk}=-K(g_{mj}g_{ik}-g_{mk}g_{ij}).$$

但是

$$\begin{aligned}R_{ijk}^l&=g^{ml}R_{mijk}\\&=g^{ml}[-K(g_{mj}g_{ik}-g_{mk}g_{ij})]\\&=-K(g^{ml}g_{mj}g_{ik}-g^{ml}g_{mk}g_{ij})\end{aligned}$$

$$= -K(\delta_j^l g_{ik} - \delta_k^l g_{ij}).$$

所以

$$R_{ijk}^l = -K(\delta_j^l g_{ik} - \delta_k^l g_{ij}).$$

6 （1）证明　由高斯公式

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^p}{\partial u^j} + \sum_p (\Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^l - \Gamma_{ik}^p - \Gamma_{pj}^l)$$
$$= \sum_m g^{ml}[L_{ij}L_{mk} - L_{ik}L_{mj}].$$

取 $k=2, j=1, l=2, i=1$ 则

$$(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2$$
$$= g^{m2}[L_{11}L_{2m} - L_{12}L_{1m}]$$
$$= g^{12}[L_{11}L_{21} - L_{12}L_{11}] + g^{22}[L_{11}L_{22} - L_{12}L_{12}]$$
$$= g^{22}[LN - M^2]$$
$$= \frac{1}{g}g_{11}[LN - M^2]$$
$$= E\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = EK.$$

（2）证明　由于

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\Gamma_{11}^2\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\Gamma_{12}^2\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\Gamma_{11}^2\right) - \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\Gamma_{12}^2\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial u^2}g_{11}\cdot\sqrt{g} - \frac{\partial}{\partial u^2}\sqrt{g}\cdot g_{11}}{(g_{11})^2}\Gamma_{11}^2 + \frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\cdot\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u^2} - \right.$$
$$\left.\frac{\frac{\partial}{\partial u^1}g_{11}\sqrt{g} - g_{11}\frac{\partial}{\partial u^1}\sqrt{g}}{(g_{11})^2}\Gamma_{11}^2 - \frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\cdot\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u^1}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\left(\frac{\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial u^2}g_{11}}{(g_{11})^2}\Gamma_{11}^2 - \frac{\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial u^1}g_{11}}{(g_{11})^2}\Gamma_{12}^2\right) + \right.$$

$$\frac{1}{g_{11}}\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\sqrt{g}\Gamma_{12}^2-\frac{\partial}{\partial u^2}\sqrt{g}\Gamma_{11}^2\right)+\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\Gamma_{11}^2-\frac{\partial}{\partial u^1}\Gamma_{12}^2\right)\Big].\quad(1)$$

由于$\frac{\partial}{\partial u^1}\sqrt{g}=\frac{\partial}{\partial u^1}\sqrt{EG-F^2}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}[E_uG+EG_u-2FF_u]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}[GE_u-2FF_u+FF_v+EG_v-FF_v]$$

$$=(\Gamma_{11}^1+\Gamma_{12}^2)\sqrt{g}.\quad(2)$$

同理 $\frac{\partial}{\partial u^2}\sqrt{g}=\frac{\partial}{\partial u^2}\sqrt{EG-F^2}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}(E_vG+EG_v-2FF_v)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}(GE_v-FG_u+EG_v-2FF_v-FG_u)$$

$$=(\Gamma_{12}^1+\Gamma_{22}^2)\sqrt{g}.\quad(3)$$

由于 $\frac{\partial}{\partial u^l}g_{ij}=\boldsymbol{r}_{il}\cdot\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_{jk}$

$$=[il,j]+[jk,i]$$

$$=\sum_m\Gamma_{il}^m g_{mj}+\sum_m\Gamma_{jl}^m g_{mi},$$

所以 $\Gamma_{11}^2\frac{\partial}{\partial u^2}g_{11}=\Gamma_{11}^2(\Gamma_{12}^1g_{11}+\Gamma_{12}^2g_{21}+\Gamma_{12}^1g_{11}+\Gamma_{12}^2g_{21})$

$$=2(g_{11}\Gamma_{12}^1+g_{12}\Gamma_{12}^2)\Gamma_{11}^2.$$

同理 $\Gamma_{12}^2\frac{\partial}{\partial u^1}g_{11}=2(g_{11}\Gamma_{11}^1+g_{12}\Gamma_{12}^2)\Gamma_{12}^2.$

因此 $\Gamma_{11}^2\frac{\partial}{\partial u^2}g_{11}-\Gamma_{12}^2\frac{\partial}{\partial u^1}g_{11}=2g_{11}(\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2),\quad(4)$

将(2)、(3)、(4)式代入(1),

原式右边$=\frac{1}{\sqrt{g}}\Big[\frac{\sqrt{g}}{(g_{11})^2}\cdot 2g_{11}(\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2)+$

$$\frac{1}{g_{11}}(-\sqrt{g}\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2-\sqrt{g}\Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2+\sqrt{g}\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2+\sqrt{g}\Gamma_{22}^2\Gamma_{11}^2)+$$

$$\left.\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\Gamma_{12}^2-\frac{\partial}{\partial u^1}\Gamma_{12}^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{g_{11}}[(\Gamma_{11}^2)_v-(\Gamma_{12}^2)_u+\Gamma_{11}^2(\Gamma_{22}^2+\Gamma_{12}^1)-$$

$$\Gamma_{12}^2(\Gamma_{12}^2+\Gamma_{11}^1)+2(\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2)]$$

另一方面,由于

$$K=-\frac{R_{1212}}{g},$$

所以 $R_{121}^2=g^{22}R_{2121}=g^{22}R_{2121}=-g^{22}gK=-g_{11}K.$

因为 $R_{121}^2=\frac{\partial}{\partial u^1}\Gamma_{12}^2-\frac{\partial}{\partial u^2}\Gamma_{11}^2+\Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^2-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2,$

故
$$K=-\frac{1}{g_{11}}[(\Gamma_{12}^2)_u-(\Gamma_{11}^2)_v+\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2+\Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^2-$$

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^2\cdot\Gamma_{22}^2]$$

$$=\frac{1}{g_{11}}[(\Gamma_{11}^2)_v-(\Gamma_{12}^2)_u+\Gamma_{11}^2(\Gamma_{22}^2+\Gamma_{12}^1)-$$

$$\Gamma_{12}^2(\Gamma_{12}^2+\Gamma_{11}^1)+2(\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^2\Gamma_{12}^1)].$$

(3) 证明　由于 $K=-\frac{R_{1212}}{g}$,所以

$$R_{212}^1=g^{12}R_{2121}=g^{11}R_{1212}=g^{11}R_{1212}=-g^{11}gK$$
$$=-g_{22}K.$$

又因 $R_{212}^1=\frac{\partial}{\partial v}\Gamma_{12}^1-\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{22}^1+\Gamma_{21}^2\Gamma_{22}^1-\Gamma_{22}^2\Gamma_{21}^1,$

所以

$$g_{22}K=\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{22}^1-\frac{\partial}{\partial v}\Gamma_{12}^1+\Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1+\Gamma_{22}^2\Gamma_{21}^1-$$

$$\Gamma_{21}^1\Gamma_{12}^1-\Gamma_{21}^2\Gamma_{22}^1$$

$$=(\Gamma_{22}^1)_u-(\Gamma_{12}^1)_v+\Gamma_{22}^1(\Gamma_{11}^1+\Gamma_{12}^2)-$$

$$\Gamma_{21}^1(\Gamma_{22}^2+\Gamma_{12}^1)+2(\Gamma_{21}^1\Gamma_{22}^2-\Gamma_{22}^1\Gamma_{12}^2). \tag{1}$$

因为

$$\begin{cases}\Gamma_{22}^2+\Gamma_{12}^1=\dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\dfrac{\partial}{\partial v}\sqrt{EG-F^2},\\ \Gamma_{12}^2+\Gamma_{11}^1=\dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\dfrac{\partial}{\partial u}\sqrt{EG-F^2},\end{cases} \tag{2}$$

又因

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial v}g_{22}=2g_{22}\Gamma_{22}^2=2(g_{21}\Gamma_{22}^1+g_{22}\Gamma_{22}^2),\\ \dfrac{\partial}{\partial u}g_{22}=2g_{22}\Gamma_{21}^1=2(g_{21}\Gamma_{21}^1+g_{22}\Gamma_{21}^2),\end{cases}$$

消去 g_{21},得

$$\Gamma_{21}^1\frac{\partial}{\partial v}g_{22}-\Gamma_{22}^1\frac{\partial}{\partial u}g_{22}=2g_{22}(\Gamma_{22}^2\Gamma_{21}^1-\Gamma_{21}^2\Gamma_{22}^1), \tag{3}$$

将(2)、(3)代入(1)式,得

$$g_{22}K=\frac{\partial\Gamma_{22}^1}{\partial u}-\frac{\partial\Gamma_{21}^1}{\partial v}+\Gamma_{22}^1\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial\sqrt{EG-F^2}}{\partial u}-$$

$$\Gamma_{21}^1\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial\sqrt{EG-F^2}}{\partial v}+\frac{1}{g_{22}}\left(\Gamma_{21}^1\frac{\partial g_{22}}{\partial v}-\Gamma_{22}^1\frac{\partial g_{22}}{\partial u}\right).$$

所以 $$K=\frac{1}{g_{22}\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial\Gamma_{22}^1}{\partial u}\sqrt{EG-F^2}-\frac{\partial\Gamma_{21}^1}{\partial v}\sqrt{EG-F^2}\right\}-$$

$$\frac{1}{(g_{22})^2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\Gamma_{22}^1\sqrt{EG-F^2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u}-\Gamma_{21}^1\sqrt{EG-F^2}\frac{\partial g_{22}}{\partial v}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\Gamma_{22}^1\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\Gamma_{12}^1\right)\right].$$

(4) 证明 因为 $ds^2=\lambda^2(du^2+dv^2)$,所以

$$E=\lambda^2,\quad F=0,\quad G=\lambda^2,$$

$$E_u=2\lambda\lambda_u,E_v=2\lambda\lambda_v,G_u=2\lambda\lambda_u,G_v=2\lambda\lambda_v.$$

因为 $F=0$,曲纹坐标网是正交网,所以

$$\Gamma_{11}^1=\frac{E_u}{2E}=\frac{\lambda_u}{\lambda},\qquad \Gamma_{11}^2=\frac{-E_v}{2G}=-\frac{\lambda_v}{\lambda},$$

$$\Gamma_{12}^1=\frac{E_v}{2E}=\frac{\lambda_v}{\lambda},\qquad \Gamma_{12}^2=\frac{G_u}{2G}=\frac{\lambda_u}{\lambda},$$

$$\Gamma_{22}^1=\frac{-G_u}{2E}=\frac{-\lambda_u}{\lambda},\quad \Gamma_{22}^2=\frac{G_v}{2G}=\frac{\lambda_v}{\lambda}.$$

将 Γ_{ij}^k 代入下式

$$K=\frac{1}{E}[(\Gamma_{11}^2)_v-(\Gamma_{12}^2)_u+\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2-(\Gamma_{12}^2)^2]$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\left[\left(\frac{-\lambda_u}{\lambda}\right)_v-\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)_u+\frac{\lambda_u^2}{\lambda^2}+\frac{-\lambda_v^2}{\lambda^2}-\frac{-\lambda_v^2}{\lambda^2}-\frac{\lambda_u^2}{\lambda^2}\right]$$

$$=-\frac{1}{\lambda^2}\left[\left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)_v+\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)_u\right]$$

$$=-\frac{1}{\lambda^2}[(\ln\lambda)_{uu}+(\ln\lambda)_{vv}].$$

(5) 证明　由于 $ds^2=du^2+Gdv^2$,所以

$$E=1,F=0,G=G.$$

$$\Gamma_{11}^1=\frac{E_u}{2E}=0,\Gamma_{11}^2=\frac{-E_v}{2G}=0,\Gamma_{12}^1=\frac{E_v}{2E}=0,$$

$$\Gamma_{12}^2=\frac{G_u}{2G},\Gamma_{22}^1=\frac{-G_u}{2E}=\frac{-G_u}{2},\Gamma_{22}^2=\frac{G_v}{2G}.$$

将 Γ_{ij}^k 代入下式,得

$$K=\frac{1}{E}\{(\Gamma_{11}^2)_v-(\Gamma_{12}^2)_u+\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2+\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2-(\Gamma_{12}^2)^2\}$$

$$=\left\{-\left(\frac{G_u}{2G}\right)_u-\left(\frac{G_u}{2G}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{G_u^2-2GG_{uu}}{4G^2}.$$

因为　$(\sqrt{G})_u=\frac{1}{2}G^{-\frac{1}{2}}G_u,$

$$(\sqrt{G})_{uu}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)G^{-\frac{3}{2}}G_u^2+\frac{1}{2}G^{-\frac{1}{2}}G_{uu}$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{G_u^2}{\sqrt{G^3}} + \frac{1}{2}\frac{GG_{uu}}{\sqrt{G^3}},$$

所以 $K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$

7 解法一 因为

$$E = \frac{1}{(u^2+v^2+C)^2}, F = 0, G = \frac{1}{(u^2+v^2+C)^2}.$$

所以 $E_u = \frac{-2(u^2+v^2+C)\cdot 2u}{(u^2+v^2+C)^4} = \frac{-4u}{(u^2+v^2+C)^3} = G_u,$

$$E_v = \frac{-2(u^2+v^2+C)\cdot 2v}{(u^2+v^2+C)^4} = \frac{-4v}{(u^2+v^2+C)^3} = G_v,$$

所以 $\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E} = \frac{-2u}{u^2+v^2+C}, \Gamma_{11}^2 = \frac{-E_v}{2G} = \frac{2v}{u^2+v^2+C},$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E} = \frac{-2v}{u^2+v^2+C}, \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G} = \frac{-2u}{u^2+v^2+C},$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{-G_u}{2E} = \frac{2u}{u^2+v^2+C}, \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G} = \frac{-2v}{u^2+v^2+C}.$$

解法二 因为 $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{(u^2+v^2+C)^2}, g_{12} = g_{21} = 0.$

$$[ij,l] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right) = \sum_l \Gamma_{ij}^k g_{kl}.$$

所以 $\Gamma_{ij}^k = \sum_l g^{kl}[ij,l]$

$$= \sum_l \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right),$$

所以 $\Gamma_{11}^1 = \sum_l g^{1l}[11,l] = \sum_l \frac{1}{2} g^{1l}\left(\frac{\partial g_{1l}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{1l}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^l}\right)$

$$= \frac{1}{2} g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}\right) + \frac{1}{2} g^{12}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{g_{22}}{g}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{1}{2}\frac{-g_{12}}{g}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\dfrac{1}{(u^2+v^2+C)^2}}{\dfrac{1}{(u^2+v^2+C)^4}} \cdot \frac{-4u}{(u^2+v^2+C)^3}$$

$$= -\frac{2u}{(u^2+v^2+C)}.$$

同理可得其余各量.

8 证明　由上题知

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{-2u}{(u^2+v^2+C)}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{2v}{(u^2+v^2+C)},$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{-2v}{(u^2+v^2+C)}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{-2u}{(u^2+v^2+C)},$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{-2v}{(u^2+v^2+C)}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{-2v}{(u^2+v^2+C)}.$$

所以 $(\Gamma_{11}^2)_v = \dfrac{2(u^2+v^2+C)-4v^2}{(u^2+v^2+C)^2} = \dfrac{2u^2+2v^2+2C}{(u^2+v^2+C)^2},$

$$(\Gamma_{12}^2)_u = \frac{-2(u^2+v^2+C)+4u^2}{(u^2+v^2+C)^2} = \frac{2u^2-2v^2-2C}{(u^2+v^2+C)^2},$$

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 = \frac{2u^2}{(u^2+v^2+C)^2}, \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 = \frac{-4v^2}{(u^2+v^2+C)^2},$$

$$\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 = \frac{-4v^2}{(u^2+v^2+C)^2}, \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 = \frac{4u^2}{(u^2+v^2+C)^2},$$

所以

$$K = \frac{1}{E}\{(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2\}$$

$$= \frac{(u^2+v^2+C)^2}{1} \cdot \frac{4C}{(u^2+v^2+C)^2} = 4C = \text{const}.$$

9 解　已知 $E=G=1, F=0, L=-1, N=M=0$.

先求第二类克氏符号:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E} = 0, \qquad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G} = 0,$$

$$\Gamma_{12}^{1}=\frac{E_v}{2E}=0,\qquad \Gamma_{12}^{2}=\frac{G_u}{2G}=0,$$

$$\Gamma_{22}^{1}=-\frac{G_u}{2E}=0,\quad \Gamma_{22}^{2}=\frac{G_v}{2G}=0.$$

再计算 μ_i^j：

$$\mu_1^1=-\frac{L}{E}=1,\qquad \mu_1^2=-\frac{M}{G}=0,$$

$$\mu_2^1=-\frac{M}{E}=0,\qquad \mu_2^2=-\frac{N}{G}=0.$$

可以验证它们满足高斯－科达齐方程.于是所求平面存在,根据高斯－魏因加因公式有：

$$\boldsymbol{r}_{uu}=-\boldsymbol{n},\tag{1}$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\boldsymbol{0},\tag{2}$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=\boldsymbol{0},\tag{3}$$

$$\boldsymbol{n}_u=\boldsymbol{r}_u,\tag{4}$$

$$\boldsymbol{n}_v=\boldsymbol{0}.\tag{5}$$

由方程(1)与(4)得

$$\boldsymbol{r}_{uuu}+\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{0}.$$

积分得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_1(v)\sin u+\boldsymbol{e}_2(v)\cos u+\boldsymbol{e}_3(v).$$

于是

$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{e}_1(v)\cos u-\boldsymbol{e}_2(v)\sin u,$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=\boldsymbol{e}'_1(v)\cos u-\boldsymbol{e}'_2(v)\sin u.$$

根据上式与方程(2)知

$$\boldsymbol{e}'_1(v)\cos u-\boldsymbol{e}'_2(v)\sin u=0,$$

即

$$\boldsymbol{e}'_1(v)=\boldsymbol{e}'_2(v)\tan u,$$

由于 $\boldsymbol{e}_1(v)$, $\boldsymbol{e}_2(v)$只与 v 有关,故上式成立当且仅当 $\boldsymbol{e}'_1(v)=\boldsymbol{e}'_2(v)=\boldsymbol{0}$,所以 $\boldsymbol{e}_1(v)$、$\boldsymbol{e}_2(v)$是常向量.

$$r = e_1 \sin u + e_2 \cos u + e_3(v).$$

由此得

$$r_v = e'_3(v), r_{vv} = e''_3(v),$$

根据方程(3) $\quad r_{vv} = e''_3(v) = 0,$

故有 $\quad e_3(v) = a + bv \quad$ (其中 a, b 是常向量).

所求曲面的方程为

$$r = e_1 \sin u + e_2 \cos u + (a + bv).$$

10 证明 由于 $E = G = 1, F = 0, L = 1, M = 0, N = -1$,所以

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0,$$

$$\mu_1^1 = -\frac{L}{E} = -1, \qquad \mu_1^2 = -\frac{M}{G} = 0,$$

$$\mu_2^1 = -\frac{M}{E} = 0, \qquad \mu_2^2 = -\frac{N}{G} = 1.$$

由上可知 $R_{mijk} = 0$ 特别 $R_{1212} = 0$.但是

$$R_{1212} = L_{21}L_{12} - L_{22}L_{11}, \text{(高斯公式)}$$

$$L_{21}L_{12} - L_{22}L_{11} = M^2 - LN = 1 \neq 0,$$

不满足高斯公式,故曲面不存在.

习题 2.6

1 解 因为是正交网,所以有

$$F = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{-E_v}{2G}.$$

对于 v - 曲线, $\mathrm{d}u = 0$,所以

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{G}\mathrm{d}v} = \frac{1}{\sqrt{G}},$$

$$k_g = \sqrt{EG}\left[-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\left(\Gamma_{22}^1 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\right]$$

$$= \sqrt{EG}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^3 \cdot \frac{G_u}{2E}$$

$$= \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}.$$

对于 u - 曲线, $\mathrm{d}v=0$,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sqrt{E}},$$

$$k_g = \sqrt{EG}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\cdot\Gamma_{11}^{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right]$$

$$= -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}.$$

2 解 球面 $\boldsymbol{r}=\{a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u\}$,

$$G=a^2\cos^2 u, F=0, E=a^2,$$

$$\mathrm{I} = a^2\cos^2 u\,\mathrm{d}v^2 + a^2\mathrm{d}u^2.$$

设 θ 是曲面上曲线与 u - 曲线方向 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角. 根据测地面率的刘维尔公式:

$$k_g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \frac{2a^2\cos u\sin u}{2a^2\sqrt{\cos^2 u}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \frac{\sin u\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}.$$

3 解 设球面为 $\boldsymbol{r}=\{R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u\}$,

$$E=R^2,\quad F=0,\quad G=R^2\cos^2 u.$$

半径为 a 的圆 (C) 的单位切向量为 $\boldsymbol{\alpha}$, 它与经线的夹角 $\theta = -\frac{\pi}{2}$, 根据刘维尔公式有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sqrt{G}}\sin\theta = \frac{1}{R\cos u}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-1}{R\cos u}.$$

代入第二题结果,得

$$k_g = \frac{1}{R}\tan u = \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{Ra}.$$

4 解 因为正螺面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2.$$

螺旋线是正螺面的 v - 曲线 $u=u_0$，由第一题结果可得

$$k_g=\frac{G_u}{2G\sqrt{E}}=\frac{u_0}{u_0^2+a^2}.$$

5 证明 设曲线(C)的球面象为$(\bar{C})$. (C)与$(\bar{C})$的测地曲率分别为 k_g 和$\bar{k}_g$.

由题设(C)为 S 上的曲率线，根据罗德里格定理 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}=-k_n\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，于是$(\bar{C})$的切向量

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}\bar{s}}=\frac{-k_n\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\bar{s}}=-k_n\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\bar{s}}\boldsymbol{\alpha}.$$

即
$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}=\delta\boldsymbol{\alpha},\delta=-k_n\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\bar{s}}=\pm 1.$$

在球面上，不妨取 $\bar{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{n}.\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\alpha}=\delta\boldsymbol{\varepsilon}$.

$$\begin{aligned}\bar{k}_g&=\dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}\cdot\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}=\delta^2\dot{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\bar{s}}\\&=k_g\cdot\left(-\frac{\delta}{k_n}\right)=-\delta\frac{k_g}{k_n}.\end{aligned}$$

所以
$$|k_g|=|k_n\cdot\bar{k}_g|.$$

6 解 设曲面曲线的方程为 $u=u(t),v=v(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}.$$

代入测地曲率的计算公式

$$\begin{aligned}k_g&=\sqrt{g}\left[\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}^2u^2}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{ij}\Gamma^2_{ij}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\right)-\right.\\&\qquad\left.\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}^2u^1}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{ij}\Gamma^1_{ij}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\right)\right]\\&=\sqrt{g}\left[\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}^2u^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2+\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}\right)+\right.\right.\\&\qquad\left.\sum_{ij}\Gamma^2_{ij}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2\right)-\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}^2u^1}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2+\right.\end{aligned}$$

$$\frac{du^1}{dt}\left(\frac{d^2 t}{ds^2}\right)+\sum_{ij}\Gamma^1_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\Big)\Big].$$

7 证明 (1) 设子午线为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,由于 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{n}$ 共面,且 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\perp\boldsymbol{\alpha}$,所以

$$\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{\beta}.$$

故子午线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$是测地线.

(2) 设子午线的切向量为 $\boldsymbol{\alpha}_0$.平行圆的主法向量为 $\boldsymbol{\beta}$.若 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 平行于旋转轴,则因 $\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{n}$ 共面且 $\boldsymbol{\alpha}_0\perp\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_0\perp\boldsymbol{n}$,故有 $\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{\beta}$,即平行圆当子午线的切线平行于旋转轴时,是测地线.反之也成立.

8 证明

(1) 由 $k^2=k_g^2+k_n^2=0$,可知 $k=0$,所以曲线为直线.

(2) 设(C)为测地线,又是曲率线,则当(C)是直线时,当然(C)是平面曲线.当(C)不是直线时,由

$$\boldsymbol{\beta}=\pm\boldsymbol{n}\quad(\text{根据}(C)\text{是测地线})$$

可知 $-k\boldsymbol{\alpha}+\tau\boldsymbol{\gamma}=\pm\dot{\boldsymbol{n}}=\pm\lambda\boldsymbol{\alpha}$(根据$(C)$是曲率线,依罗德里格定理).所以 $\tau=0$,即(C)是平面曲线.

9 解 由于 $du^2=v(du^2+dv^2)$,所以有 $E=G=v,F=0$,于是有

$$E_v=G_v=1,G_u=E_u=0.$$

由测地线的微分方程得

$$\begin{cases}\dfrac{du}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{E}}\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{v}}\cos\theta,\\[2ex]\dfrac{dv}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{G}}\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{v}}\sin\theta,\\[2ex]\dfrac{d\theta}{ds}=\dfrac{1}{2\sqrt{GE}}\left(\dfrac{E_v}{\sqrt{E}}\cos\theta-\dfrac{G_u}{\sqrt{G}}\sin\theta\right)\\[2ex]\qquad=\dfrac{1}{2v\sqrt{v}}\cos\theta=\dfrac{1}{2v}\dfrac{du}{ds}.\end{cases}$$

由前两个方程得

$$\sin\theta du=\cos\theta dv,\quad 即\quad \frac{du}{dv}=\cot\theta.$$

由后一个方程得

$$d\theta=\frac{1}{2v}du,$$

$$\sin\theta d\theta=\sin\theta\cdot\frac{1}{2v}du=\sin\theta\cdot\frac{1}{2v}\cot\theta d v,$$

$$=\frac{1}{2v}\cos\theta dv,$$

则有

$$\tan\theta d\theta=\frac{1}{2v}dv.$$

两边积分得

$$\sqrt{v}\cos\theta=C,\cos\theta=\frac{C}{\sqrt{v}}(C\text{ 为积分常数}),$$

$$\frac{du}{dv}=\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}=\frac{C}{\sqrt{v-C^2}},$$

所以

$$du=\frac{Cdv}{\sqrt{v-C^2}}.$$

积分得

$$u=2C\sqrt{v-C^2},$$

即

$$u^2=4C^2(v-C^2).$$

所求的测地线在 uv 平面上是抛物线.

10　解　由于 $\boldsymbol{r}=\{u\cos v,u\sin v,av\}$,

$$E=1,\quad F=0,\quad G=u^2+a^2.$$

由测地线的微分方程得

$$\frac{du}{dv}=\sqrt{\frac{E}{G}}\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\tan\theta. \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\tan\theta$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial \ln(u^2+a^2)}{\partial u}\tan\theta$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\ln(u^2+a^2)}{\mathrm{d}u}\tan\theta, \qquad (2)$$

由(2)式得

$$\ln\sin\theta=\frac{1}{2}\ln(u^2+a^2)+\ln C,$$
$$\sin\theta=\frac{C}{\sqrt{u^2+a^2}},$$
$$\cos\theta=\frac{\sqrt{u^2+a^2-C^2}}{\sqrt{u^2+a^2}}.$$

再根据(1)式得

$$\mathrm{d}v=\frac{C\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+a^2-C^2}\sqrt{u^2+a^2}},$$
$$v=C\int_{u_0}^{u}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+a^2-C^2}\sqrt{u^2+a^2}},$$

此即测地线的曲纹坐标表示.

11 证明 (1) 对于平面 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2$,

$$E=G=1,\quad F=0,\quad E_u=E_v=G_u=G_v=0.$$

代入测地线的方程得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=0,\quad \theta=\text{const}.$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\cos\theta,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=\sin\theta,\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\cot\theta=\text{const},$$
$$u=av+b,$$

是平面上的直线.

(2) 对于圆柱面 $\boldsymbol{r}=\{R\cos\theta,R\sin\theta,z\}$,

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = 1,$$
$$E_u = G_u = E_v = G_v = 0.$$

代入测地线的方程,解得

$$z = a\theta + b.$$

测地线为

$$\boldsymbol{r} = \{R\cos\theta, R\sin\theta, a\theta + b\},$$

是圆柱螺线.

12 证明 因为 $k_g = \pm k\sin\theta$, θ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角, $k_g = 0$, $k \neq 0$, 所以 $\sin\theta = 0$, $\theta = 0$, 或 $\theta = \pi$, 即 $\boldsymbol{\beta} = \pm\boldsymbol{n}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{n} &= \mathrm{d}\boldsymbol{\beta} = \dot{\boldsymbol{\beta}}\mathrm{d}s = (-k\boldsymbol{\alpha} + \tau\boldsymbol{\gamma})\mathrm{d}s \\ &= -k\boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}s = -k\mathrm{d}\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

根据罗德里格定理知测地线是曲率线.

13 证明 设曲面上曲线的方程为

$$u = u(t), \quad v = v(t).$$

因为

$$\begin{aligned} k_g &= \sqrt{g}\left[\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}^2u^2}{\mathrm{d}s^2} + \sum_{ij}\Gamma_{ij}^2\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\right) - \right. \\ &\qquad \left.\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}^2u^1}{\mathrm{d}s^2} + \sum_{ij}\Gamma_{ij}^1\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{g}}{\mathrm{d}s^3}\left[u'\mathrm{d}t\left(v''\mathrm{d}t^2 + v'\mathrm{d}^2t + \frac{G_u}{2G}u'v'\mathrm{d}t^2 + \frac{G_u}{2G}u'v'\mathrm{d}t^2 + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\frac{G_v}{2G}v'^2\mathrm{d}t^2\right) - v'\mathrm{d}t\left(u''\mathrm{d}t^2 + u'\mathrm{d}^2t - \frac{G_u}{2}v'^2\mathrm{d}t^2\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{G}}{(u'^2 + Gv'^2)^{\frac{3}{2}}}\left[u'v'' - v'u'' + \frac{1}{2}G_uv'^3 + \frac{G_v}{2G}u'v'^2 + \right. \\ &\qquad \left.\frac{G_u}{G}u'^2v'\right]. \end{aligned}$$

由于 $\mathrm{d}s = (u'^2 + Gv'^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$,

$$k_g\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{G}}{(u'^2 + Gv'^2)}\left(u'v'' - u''v' + \frac{1}{2}G_uv'^2 + \frac{G_v}{2G}u'v'^2 + \right.$$

$$\left.\frac{G_u}{G}u'^2 v'\right)\mathrm{d}t. \tag{1}$$

另一方面，

$$\mathrm{d}\left(\arctan\sqrt{G}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\mathrm{d}v=\mathrm{d}\left(\arctan\sqrt{G}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\mathrm{d}v.$$

$$=\frac{\dfrac{\dfrac{G_u}{2\sqrt{G}}u'^2 v'+\dfrac{G_v}{2\sqrt{G}}u'v'^2+\sqrt{G}u'v'-\sqrt{G}u''v'}{u'^2}}{1+\dfrac{Gv'^2}{u'^2}}\mathrm{d}t+(\sqrt{G})_u v'\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sqrt{G}u'v''-\sqrt{G}u''v'+\dfrac{G_u}{2\sqrt{G}}v'u'^2+\dfrac{G_v}{2\sqrt{G}}u'v'^2+\dfrac{G_u}{2\sqrt{G}}u'^2v+\dfrac{GG_u}{2\sqrt{G}}v'^3}{u'^2+Gv'^2}\mathrm{d}t.$$

$$=\frac{\sqrt{G}}{(u'^2+Gv'^2)}\left(u'v''-u''v'+\frac{1}{2}G_u v'^3+\frac{G_u}{G}u'^2v'+\frac{G_v}{2G}u'v'^2\right)\mathrm{d}t. \tag{2}$$

由(1)、(2)式得

$$k_g\mathrm{d}s=\mathrm{d}\left(\arctan\sqrt{G}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\mathrm{d}v.$$

14　证明　因为 $E=1,F=0,G=G(u,v)$，所以

$$\Gamma_{11}^1=0,\quad \Gamma_{12}^1=0,\quad \Gamma_{22}^1=-\frac{1}{2}G_u,$$

$$\Gamma_{11}^2=0,\quad \Gamma_{12}^2=\frac{G_u}{2G},\quad \Gamma_{22}^2=\frac{G_v}{2G}.$$

设测地线的方程为 $u=u(v)$，则它满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u^k}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{ij}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}=0\quad(k=1,2),$$

消去 ds，得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2}=\Gamma_{11}^2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^3+(2\Gamma_{21}^2-\Gamma_{11}^1)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2+$$

$$(\Gamma_{22}^2-2\Gamma_{12}^1)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}-\Gamma_{22}^1$$

$$=\frac{1}{G}G_u\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2+\frac{1}{2G}G_v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}+\frac{1}{2}G_u. \tag{1}$$

此测地线与 u - 曲线的交角为 α 时,有

$$\cos\alpha=\frac{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}}{\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2+G}},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\sqrt{G}\cot\alpha. \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2}=-\sqrt{G}\csc^2\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}v}+[(\sqrt{G})_v+(\sqrt{G})_u\sqrt{G}\cot\alpha]\cot\alpha. \tag{3}$$

将(2)代入(1)得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2}=G_u\cot^2\alpha+\frac{G_v}{2\sqrt{G}}\cot\alpha+\frac{1}{2}G_u. \tag{4}$$

将(4)代入(3)得

$$\sqrt{G}\csc^2\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}v}+\frac{1}{2}(\cot^2\alpha+1)G_u=0.$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}v}=-(\sqrt{G})_u.\quad 即\quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}v}=-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

15 证明 在每族测地线中任取两条,围成曲面上的曲边四边形.根据已知条件,曲边四边形的外角和为 2π.由高斯 - 波涅公式有

$$\int_G K\mathrm{d}\sigma+2\pi=2\pi,$$

$$\int_G K\mathrm{d}\sigma=0.$$

若在曲面的某点 P_0 处,$K\neq0$,不妨设 $K(P_0)>0$,则在 P_0 点邻近 $K>0$,从而对于围绕 P_0 点的充分小的曲边四边形有

$$\int_G K\mathrm{d}\sigma > 0.$$

得出矛盾，所以 $K\equiv 0$，即曲面是可展面.

16 解　由高斯－波涅公式有

$$\iint_G K\mathrm{d}\sigma = S_{(\triangle)} - \pi.$$

对于半径为 R 的球面，$K=\frac{1}{R^2}$，所以

$$S_{(\triangle)} = \pi + \frac{1}{R^2}A_{(\triangle)},$$

其中 $A_{(\triangle)}$ 为测地三角形的面积.

17 解　与 15 题相同.

18 证明　设若存在所述闭测地线 (C). 它所围成的曲面部分为 G，则由高斯－波涅公式

$$\iint_G K\mathrm{d}\sigma + \oint_{\partial G} k_g \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{k}(\pi - \alpha_i) = 2\pi.$$

因为 $K<0$，则 $\iint_G K\mathrm{d}\sigma \leqslant 0$，又后两项均为 0，得出矛盾. 所以不存在所述闭测地线.

19 证明　设

$$\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{r}_1 + a^2\boldsymbol{r}_2,$$

$$\boldsymbol{b} = b^1\boldsymbol{r}_1 + b^2\boldsymbol{r}_2.$$

则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (a^1+b^1)\boldsymbol{r}_1 + (a^2+b^2)\boldsymbol{r}_2,$$

$$f\boldsymbol{a} = fa^1\boldsymbol{r}_1 + fa^2\boldsymbol{r}_2,$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a^1b^1 + a^2b^2.$$

(1)　$\mathrm{D}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$$= \mathrm{D}(a^1+b^1)\boldsymbol{r}_1 + \mathrm{D}(a^2+b^2)\boldsymbol{r}_2$$

$$= \Big(\mathrm{d}(a^1+b^1) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\Gamma^1_{\alpha\beta}(a^\alpha + b^\alpha)\mathrm{d}u^\beta\Big)\boldsymbol{r}_1 +$$

$$\left(\mathrm{d}(a^2+b^2)+\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{2}(\theta^{\alpha}+b^{\alpha})\mathrm{d}u^{\beta}\right)\boldsymbol{r}_2$$

$$=\left(\mathrm{d}a^1+\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{1}a^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}\right)\boldsymbol{r}_1+$$

$$\left(\mathrm{d}a^2+\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{2}a^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}\right)\boldsymbol{r}_2+$$

$$\left(\mathrm{d}b^1+\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{1}b^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}\right)\boldsymbol{r}_1+$$

$$\left(\mathrm{d}b^2+\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{2}b^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}\right)\boldsymbol{r}_2$$

$$=\mathrm{D}(\boldsymbol{a})+\mathrm{D}(\boldsymbol{b});$$

(2) $\mathrm{D}(f\boldsymbol{a})$

$$=\left[\mathrm{d}(fa^1)+\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{1}fa^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}\right]\boldsymbol{r}_1+$$

$$\left[\mathrm{d}(fa^2)+\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{2}fa^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}\right]\boldsymbol{r}_2$$

$$=\left[\mathrm{d}f\cdot a^1+f\mathrm{d}a^1+f\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{1}a^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}\right]\boldsymbol{r}_1+$$

$$\left[\mathrm{d}f\cdot a^2+f\mathrm{d}a^2+f\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{2}a^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}\right]\boldsymbol{r}_2$$

$$=\mathrm{d}fa^1\boldsymbol{r}_1+\mathrm{d}fa^2\boldsymbol{r}_2+f\left(\mathrm{d}a^1+\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{1}a^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}\right)\boldsymbol{r}_1+$$

$$f\left(\mathrm{d}a^2+\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{2}a^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}\right)\boldsymbol{r}_2$$

$$=\mathrm{d}f\boldsymbol{a}+f\mathrm{D}\boldsymbol{a};$$

(3) $\mathrm{d}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\mathrm{d}(a^1b^1+a^2b^2)$

$$=\mathrm{d}a^1\cdot b^1+a^1\cdot\mathrm{d}b^1+\mathrm{d}a^2\cdot b^2+a^2\cdot\mathrm{d}a^2,$$

$\mathrm{D}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{D}\boldsymbol{b}$

$$=\left\{\left[\mathrm{d}a^1+\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{1}a^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}\right]\boldsymbol{r}_1+\left[\mathrm{d}a^2+\right.\right.$$

$$\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{2}a^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}\Big]\boldsymbol{r}_2\Big\}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\Big\{\Big[\mathrm{d}b^1+$$

$$\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{1}b^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}\Big]\boldsymbol{r}_1+\Big[\mathrm{d}b^2+\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{2}b^{\alpha}\mathrm{d}u^{\beta}\Big]\boldsymbol{r}_2\Big\}$$

$$=\mathrm{d}a^1\cdot b^1+\mathrm{d}a^2\cdot b^2+\mathrm{d}b^1\cdot a^1+\mathrm{d}b^2\cdot a^2.$$

20 证明 设

$$\boldsymbol{a}=a^1\boldsymbol{r}_1+a^2\boldsymbol{r}_2$$

$$\boldsymbol{b}=b^1\boldsymbol{r}_1+b^2\boldsymbol{r}_2,$$

则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a^1b^1+a^2b^2.$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})&=\frac{\mathrm{d}a^1}{\mathrm{d}t}b^1+a^1\frac{\mathrm{d}b^1}{\mathrm{d}t}+a^2\frac{\mathrm{d}b^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}a^2}{\mathrm{d}t}b^2\\&=-\Big(\sum_{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^{1}a^{\alpha}\frac{\mathrm{d}u^{\beta}}{\mathrm{d}t}b^1+a^1\Gamma_{\alpha\beta}^{1}b^{\alpha}\frac{\mathrm{d}u^{\beta}}{\mathrm{d}t}+\\&\quad a^2\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{2}b^{\alpha}\frac{\mathrm{d}u^{\beta}}{\mathrm{d}t}+b^2\sum_{\alpha\beta=1}^{2}\Gamma_{\alpha\beta}^{2}a^{\alpha}\frac{\mathrm{d}u^{\beta}}{\mathrm{d}t}\Big)\\&=0.\end{aligned}$$

所以,沿曲线平行移动时,$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=$常数.

又由于$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=$常数,所以沿曲线平行移动时,向量的长度不变,两向量夹角不变.

第三章　外微分形式和活动标架

习题　3.1.1

1　证明　设 $v=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$，由已知，

$$v\wedge a=0,$$

即 $(a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n)\wedge(e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_p)=0$，

所以有

$$(a_1e_1\wedge e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_p)+(a_2e_2\wedge e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_p)+\cdots+(a_ne_n\wedge e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_p)=0.$$

由于

$$e_i\wedge e_i=0,$$

于是有

$$(-1)^pa_{p+1}e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_p\wedge e_{p+1}+(-1)^pa_{p+2}e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_p\wedge e_{p+2}+\cdots+(-1)^pa_ne_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_p\wedge e_n=0.$$

由于 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一组基，所以

$$a_{p+1}=a_{p+2}=\cdots=a_n=0,$$

因此

$$v=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_pe_p.$$

2　证明

$$\begin{aligned}\alpha^r&=\underbrace{\alpha\wedge\alpha\wedge\cdots\wedge\alpha}_{r个}\\&=(e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4+\cdots+e_{2r-1}\wedge e_{2r})\wedge(e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4+\cdots+e_{2r-1}\wedge e_{2r})\wedge\cdots\wedge(e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4+\cdots+e_{2r-1}\wedge e_{2r})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=[(e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4+e_1\wedge e_2\wedge e_5\wedge e_6+\cdots+e_1\wedge e_2\wedge \\
&\quad e_{2r-1}\wedge e_{2r})+\cdots+(e_{2r-1}\wedge e_{2r}\wedge e_1\wedge e_2+e_{2r-1}\wedge e_{2r} \\
&\quad \wedge e_3\wedge e_4+\cdots+e_{2r-1}\wedge e_{2r}\wedge e_{2r-3}\wedge e_{2r-2})]\wedge \\
&\quad \underbrace{\alpha\wedge\alpha\wedge\cdots\wedge\alpha}_{r-2\text{个}} \\
&=[2(e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4+e_1\wedge e_2\wedge e_5\wedge e_6+\cdots+e_1\wedge e_2 \\
&\quad \wedge e_{2r-1}\wedge e_{2r}+e_3\wedge e_4\wedge e_5\wedge e_6+\cdots+e_3\wedge e_4\wedge e_{2r-1} \\
&\quad \wedge e_{2r}+\cdots+e_{2r-3}e_{2r-2}\wedge e_{2r-1}e_{2r})]\wedge\underbrace{\alpha\wedge\alpha\wedge\cdots\wedge\alpha}_{r-2\text{个}} \\
&=n!\ (e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge\cdots\wedge e_{2r-1}\wedge e_{2r})\neq 0.
\end{aligned}
$$

$$
\alpha^{r+1}=n!\ (e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_{2r-1}\wedge e_{2r})\wedge(e_1\wedge e_2+\cdots+e_{2r-1}\wedge e_{2r})=0.
$$

习题 3.1.2

1 证明

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k\wedge\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j<k}\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^k \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k<i}\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^k\wedge\mathrm{d}x^i \\
&= \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^k.
\end{aligned}
$$

2 解 取

$$\varphi=x^1\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n.$$

或取 $\varphi=(-1)^{r-1}x^r\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{r-1}\wedge\mathrm{d}x^{r+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n.$

$$=(-1)^{r-1}x^r\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^r\wedge\mathrm{d}x^{r+1}\cdots\wedge\mathrm{d}x^n \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

即可.

3 解 直接计算即可.

4 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\right)\wedge\left(\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\right)$

$$=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.$$

习题 3.1.3

证明　因为 $\omega=yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$,所以

$$\mathrm{d}\omega=(x-x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y-y)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z-z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=0.$$

命　$\theta=-y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y-\frac{xy}{z}\mathrm{d}z$,

$$\theta\wedge\omega=\left(-y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y-\frac{xy}{z}\mathrm{d}z\right)\wedge(yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)$$
$$=-xyz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-xy^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z-xyz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x-x^2y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-xy^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-x^2y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y$$
$$=0.$$

所以　$\mathrm{d}\omega=\theta\wedge\omega$.因而满足 Frobeninus 条件.

命　$\bar{\omega}=\omega\big|_{y=y_0}$,考虑 Pfaff 方程

$$\bar{\omega}=y_0z\mathrm{d}x+xy_0\mathrm{d}z=0,$$

它是一个常微分方程,即

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{y_0z}{xy_0}=-\frac{z}{x}.$$

所以
$$\ln z=-\ln x+\ln\varphi(y_0).$$

即
$$z=\frac{\varphi(y_0)}{x}\quad\text{或}\quad\varphi=xz.$$

再以 y 代 y_0,注意到

$$\omega=\bar{\omega}\big|_{y_0\to y}+zx\mathrm{d}y,$$

将上面结果代入，得

$$\begin{aligned}\omega &= zy\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}z + zx\mathrm{d}y \\ &= y\frac{\varphi(y)}{x}\mathrm{d}x - xy\frac{\varphi(y)}{x^2}\mathrm{d}x + xy\frac{\mathrm{d}(\varphi(y))}{x} + \frac{\varphi(y)}{x}x\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{d}(\varphi(y))\cdot y + \varphi(y)\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

解这个常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}(\varphi(y))}{\varphi(y)} = -\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

得

$$\ln(\varphi(y)) = -\ln y + \ln C,$$

$$\varphi(y) = \frac{C}{y},$$

从而有

$$xz = \frac{C}{y},$$

故积分曲面的方程为 $xyz = C$.

习题 3.3

1 解 $\omega^1 = \sqrt{E}\mathrm{d}u$, $\omega^2 = \sqrt{G}\mathrm{d}v, \omega^1 \wedge \omega^2 = \sqrt{EG}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$.

$$\mathrm{d}\omega^1 = -\frac{E_v}{2\sqrt{E}}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v, \quad \mathrm{d}\omega^2 = \frac{G_u}{2\sqrt{G}}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

$$\omega_1^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2}\right)\omega^1 + \left(\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}\right)\omega^2 = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\mathrm{d}u + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\mathrm{d}v.$$

$$\mathrm{d}\omega_1^2 = \frac{2(E_{vv} + G_{uu})EG - E_v(E_vG + EG_v) - G_u(E_uG + EG_u)}{4(EG)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

$$K = \frac{-2(E_{vv} + G_{uu})EG + E_v(E_vG + EG_v) + G_u(E_uG + EG_u)}{4(EG)^2}.$$

余下的证明可代入上式完成.

2 解 因为 $\mathrm{I} = [U(u) + V(v)](\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$，所以

$$\omega^1 = \sqrt{E}\mathrm{d}u = \sqrt{U(u) + V(v)}\mathrm{d}u,$$

$$\omega^2=\sqrt{G}\,\mathrm{d}v=\sqrt{U(u)+V(v)}\,\mathrm{d}v.$$

$$\mathrm{d}\omega^1=\frac{V'}{2\sqrt{U+V}}\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}u=-\frac{V'\mathrm{d}u}{2(U+V)}\wedge\omega^2,$$

$$\mathrm{d}\omega^2=\frac{U'}{2\sqrt{U+V}}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=-\frac{U'\mathrm{d}v}{2(U+V)}\wedge\omega^1.$$

与 $\mathrm{d}\omega^1=-\omega_2^1\wedge\omega^2$， $\mathrm{d}\omega^2=-\omega_1^2\wedge\omega^1=\omega_2^1\wedge\omega^1$ 比较，得

$$\omega_1^2=\frac{U'\mathrm{d}v-V'\mathrm{d}u}{2(U+V)},$$

$$\mathrm{d}\omega_1^2=\frac{U'U'+V'V'-(U''+V'')(U+V)}{2(U+V)^2}\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}u$$

$$=\frac{U'U'+V'V'-(U''+V'')(U+V)}{2(U+V)^3}\omega^2\wedge\omega^1.$$

$$K=\frac{U'U'+V'V'-(U''+V'')(U+V)}{2(U+V)^3}.$$

3 解 由于 $\mathrm{I}=\dfrac{\mathrm{d}u^2-4v\mathrm{d}u\mathrm{d}v+4u\mathrm{d}v^2}{4(u-v^2)}(u>v^2)$，可改写为

$$\mathrm{I}=\frac{(\mathrm{d}u-2v\mathrm{d}v)^2}{4(u-v^2)}+\mathrm{d}v^2.$$

所以 $\omega^1=\dfrac{\mathrm{d}u-2v\mathrm{d}v}{2\sqrt{u-v^2}}$， $\omega^2=\mathrm{d}v.$

所以 $\mathrm{d}\omega^1=0$， $\mathrm{d}\omega^2=0$， $\omega_1^2=0$， $K=0.$

4 证明 设在曲面域内两测地线相交于两点 A、B. 它们包围的区域是 G，在交点处的内角分别为 $\angle A$ 和 $\angle B$，根据高斯－波涅公式有

$$\int_G K\omega^1\wedge\omega^2+\int_{\partial G}k_g\mathrm{d}s+(\pi-\angle A)+(\pi-\angle B)=2\pi.$$

因为 $k_g=0$，所以

$$\int_G K\omega^1\wedge\omega^2=\angle A+\angle B>0,$$

与 $K\leqslant 0$ 矛盾.

5 证明 直接应用高斯－波涅公式

$$\int_A K\omega^1 \wedge \omega^2 + \int_{\partial A} k_g \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{4} (\pi - l_i) = 2\pi.$$

6 注意:单连通闭曲面是不可能如此剖分的,但是像环面这样的闭曲面则是可能的.

设闭曲面如习题中所要求的剖分后的四边形为 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$,它们的公共顶点正好也是 n 个:$P_i(i=1,2,\cdots,n)$.对每一个四边形 A_i,用高斯－波涅公式,然后相加:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{A_i} K\omega^1 \wedge \omega^2 + \int_{\partial A_i} k_g \mathrm{d}s + 4\pi - (A_i \text{ 的 4 个内角})\right]$$
$$=2n\pi.$$

由于曲面是定向的.四边形 A_i 的边缘相加后互相抵消.此外,各四边形的内角和正好是围绕各公共顶点的四个角之和,所以

$$\int_S K\omega^1 \wedge \omega^2 + \sum_{i=1}^{n} (4\pi - 2\pi) = 2n\pi.$$

因此
$$\int_S K\omega^1 \wedge \omega^2 = 0.$$

7 证明 把曲面 S 三角剖分,在各三角形上积分 $\mathrm{d}\varphi$,应用 Stokes 定理,则

$$\int_S \mathrm{d}\varphi = \int_{\partial S} \varphi = 0.$$

8 证明 直接计算可得.

9 证明

$$\sqrt{EG-F^2} = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| = \left|\left(\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + \boldsymbol{r}_{\tilde{v}}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}\right) \times \left(\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} + \boldsymbol{r}_{\tilde{v}}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}\right)\right|$$
$$= |\boldsymbol{r}_{\tilde{u}} \times \boldsymbol{r}_{\tilde{v}}| \cdot \left|\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}\right| = \sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}\left|\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}\right|.$$

$$\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$$
$$= \sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}\,\mathrm{d}\tilde{u} \wedge \mathrm{d}\tilde{v}.$$

10 解 $\omega^1=\sqrt{E}\,\mathrm{d}u$, $\omega^2=\sqrt{G}\,\mathrm{d}v$,

$\omega_1^3=k_1\omega^1$, $\omega_2^3=k_2\omega^2$.

$$\omega_1^2=-\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\mathrm{d}u+\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\mathrm{d}v$$

$$=-\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}\omega^1+\frac{G_u}{2G\sqrt{E}}\omega^2.$$

第四章 整体微分几何初步

习题 4.1.1

1 解 这是简单闭曲线.

$$n_C=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\theta(a_{j+1})-\theta(a_j)\right]+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j,j=0,1.$$

$$\theta(a_1)-\theta(a_0)=\frac{\pi}{3},\theta(a_2)-\theta(a_1)=\frac{\pi}{3}.$$

$$\alpha_1=\frac{\pi}{2},\alpha_2=\frac{\pi}{2},\alpha_3=\frac{\pi}{3}.$$

$$n_C=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1.$$

2 解 对于曲线(C):$x(t)=\cos t,y(t)=\sin 2t$,则 $x'(t)=-\sin t,x''(t)=-\cos t;y'(t)=2\cos 2t,y''(t)=-4\sin 2t$,

$$k(s(t))=\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=8\sin^2 t\cos t-4\cos t,x'^2+y'^2=1.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k(s(t))\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(8\sin^2 t\cos t-4\cos t)\mathrm{d}t.$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{8}{3}\sin^3 t-4\sin t\right)\Big|_0^{2\pi}=0.\quad\therefore\ n_C=0.$$

习题 4.1.2

解 因为 $k\neq0$,所以曲线上不可能有直线段.因此,直线与凸闭曲线之交不能有三个或三个以上的交点.

习题 4.1.3

1 解 因为 $L=6, A=3$,由于 $L^2\geqslant 4\pi A$,即 $36\geqslant 4\pi A=12\pi$,这是不可能的.

2 证明 由于旋转数

$$n_C=\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}k(s)\mathrm{d}s=1,$$

所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\frac{1}{r}\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}k(s)\mathrm{d}s=1,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\frac{1}{r}\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi r}L\geqslant 1\Rightarrow L\geqslant 2\pi r.$$

3 证明 与等周不等式的证明相同,只是把切于简单正规闭曲线的一对平行线改成过 A 和 B 垂直于 AB 的一对直线,最后得到 L 的方程是圆的方程,但是这里 L 是圆弧.

习题 4.1.4

1 证明 由于 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)=k(s)\boldsymbol{n}(s), \dot{\boldsymbol{n}}(s)=-k(s)\boldsymbol{\alpha}(s), \ddot{\boldsymbol{\alpha}}=(k\boldsymbol{n})^{\cdot}=\dot{k}(s)\boldsymbol{n}(s)-k^2\boldsymbol{\alpha}$.对于卵形线,它至少有 4 个顶点,在顶点处,$k$ 取局部极值,则 $\dot{k}=0$,所以至少有四个点处,$\ddot{\boldsymbol{\alpha}}$ 平行于 $\boldsymbol{\alpha}$.

2 证明 对于抛物线 $\boldsymbol{r}=(t,t^2), t\in[0,\infty)$,

$$k(s(t))=\frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

由于 k 不变号,所以曲线是凸的.求 k 的局部极值点:

$$k'=\left(\frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)'=\frac{24t\sqrt{1+4t^2}}{(1+4t^2)^3}=0,$$

只有一解 $t=0$,因此,只有一个顶点,说明四顶点定理在非闭曲线不成立.

3 解 $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t, b\sin t)\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

$$x(t)=a\cos t,\quad x'(t)=-a\sin t,\quad x''(t)=-a\cos t,$$
$$y(t)=b\sin t,\quad y'(t)=b\cos t,\quad y''(t)=-b\sin t.$$

$$k(t)=\frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{ab\sin^2 t+ab\cos^2 t}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$
$$k'(t)=-\frac{3ab}{2}\cdot\frac{(a^2-b^2)\sin 2t}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}=0,$$

即
$$\sin 2t=0,$$

则
$$t_1=0,\quad t_2=\frac{\pi}{2},\quad t_3=\pi,\quad t_4=\frac{3}{2}\pi.$$

习题 4.1.5

1 证明 设对应点是 $\boldsymbol{r}(s)$和 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$.
$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s)-\boldsymbol{r}(s)=v\dot{\boldsymbol{r}}(s)+w\boldsymbol{n}(s).$$
前面已证明 $v=0$,所以 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)-\boldsymbol{r}(s)=w\boldsymbol{n}(s)$,即
$$(\tilde{\boldsymbol{r}}(s)-\boldsymbol{r}(s))\,/\!/\,\boldsymbol{n}(s).$$
则相对点的连线与相对点的切线正交.

2 证明 根据上题,
$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{r}(s)+w\boldsymbol{n}(s),$$
设 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$的弧长为 $\tilde{s}$,
$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}(s)}{\mathrm{d}\tilde{s}}=(1-\omega k(s))\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tilde{s}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}.$$
但是$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}(s)}{\mathrm{d}\tilde{s}}$与$\boldsymbol{r}(s)$的切向相反.$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}(s)}{\mathrm{d}\tilde{s}}=-\dot{\boldsymbol{r}}(s)$,从而推出 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$的法向量是$-\boldsymbol{n}(s)$.所以
$$(1-wk(s))\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tilde{s}}=-1,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\boldsymbol{r}}(s)}{\mathrm{d}\tilde{s}^2}=-\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}(s)}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tilde{s}}=-k(s)\frac{1}{wk(s)-1}\boldsymbol{n}(s).$$

所以 $\tilde{r}(s)$ 的曲率是 $\dfrac{k(s)}{wk(s)-1}$. 故有

$$\frac{1}{k(s)}+\frac{wk(s)-1}{k(s)}=w=\text{常数}.$$

习题 4.1.6

证明 将曲线(C)置于坐标系的上半平面. 对于与(C)相交的直线集来说, $\theta\in[0,\pi]$, 又 $\sigma\mathrm{d}\rho=\mathrm{d}A$, 是$(C)$所包围区域的面积元素, 所以

$$\int_{l\cap(C)\neq\varnothing}\sigma\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\theta=\int_A\mathrm{d}A\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta=\pi A.$$

习题 4.2.1

1 证明 设(C)的长度为 L, 则其总曲率

$$K=\int_0^L k\mathrm{d}s\leqslant\int_0^L\frac{1}{R}\mathrm{d}s=\frac{L}{R},$$

由 Fenchel 定理知 $K\geqslant 2\pi$, 即 $\dfrac{L}{R}\geqslant 2\pi$, $L\geqslant 2\pi R$.

2 解 当三条圆弧外切时, 三圆弧的曲率

$$K=3\int_0^l\frac{1}{2}\mathrm{d}s=3\cdot\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\frac{1}{2}\mathrm{d}s=\pi.$$

三个外角和为 3π. 所以, 全曲率 $=4\pi$.

3 仿照书中 §2.1 的例子进行计算.

4 证明 设半球面顶点的向径为 $\boldsymbol{a}$. 对于曲线(C): $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ $(0\leqslant s\leqslant L)$的切映射象 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)\subset$这个半球面内, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}>0$, 所以

$$0<\int_0^L(\boldsymbol{a}-\dot{\boldsymbol{r}}(s))\mathrm{d}s=\int_0^L\mathrm{d}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r}(s))=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r}(s))\Big|_0^L=0,$$

这是不可能的. 惟一的可能性在于切映射象 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 是半球面的边缘大圆, 这时 $\boldsymbol{a}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0$.

习题 4.2.2

1 任何大圆交球面 S 上的大圆 (C) 于对径点，所以 $n(w)=2$. $\iint_S n(w)\mathrm{d}s=2\cdot4\pi=8\pi$，$4L=4\cdot2\pi=8\pi$. Crofton 公式得以验证.

2 因为一条正规闭曲线的切映射象不可能在同一半球内.因此，它与半球面的边缘大圆的交点不少于两个.但是一条正规闭曲线的全曲率就是它的切映射的象的长.所以，根据球面的 Crofton 公式，

$$\iint_S n(w)\mathrm{d}s=4L.$$

但是
$$\int_{(C)}k(s)\mathrm{d}s=L,\quad n(w)\geqslant 2.$$

所以
$$4L=4\int_{(C)}k(s)\mathrm{d}s=\iint_S n(w)\mathrm{d}s\geqslant 2\iint_S \mathrm{d}s\geqslant 8\pi.$$

所以
$$\int_{(C)}k(s)\mathrm{d}s\geqslant 2\pi.$$

特别地，当 (C) 是平面曲线时，切映射象是半球面的边缘大圆，这时，等号成立.

习题 4.2.4

证明 因为

$$\int_{(C)}\frac{\tau(s)}{k(s)}\mathrm{d}s=\int_0^L\frac{\dot{k}\mathrm{d}s}{k^2\sqrt{k^2-1}}=\sqrt{1-\frac{1}{k^2(s)}}\Bigg|_0^L=0.$$

注意：球面曲线 (C) 的曲率 $k(s)\neq0$.

习题 4.3.3

1 解 根据 Hadamard 定理的推论，M 在 P 点的切平面的同一侧.设法向量 $\boldsymbol{n}(P)$ 是外向的，定义 M 上的函数 $\boldsymbol{r}(u,v)\cdot$

$n(P)$.由于 M 是紧致的,$r\cdot n(P)$在 M 上有极值点 r_0.命 $r(t)$是 M 上过极值点 r_0 的正规曲线,则$[r(t)\cdot n(P)]'_{r=r_0}=0$,所以 $r'_0(t)\cdot n(P)=0$,这说明 M 在极值点 r_0 的切平面是垂直于 P 点的法向量 $n(P)$.换言之,在极值点的切平面都互相平行.这说明:这样的极值点不能超过两个,这是因为凸曲面是不能有两个以上的平行切平面的.这两个极值点中有一个是 P 点,命另一个是 $\bar{P}$ 点,这两点的切平面都垂直于 $n(P)$,它们是互相平行的.

2 解 命 P 点是 $r=r(u,v)$,$\bar{P}$ 点是 $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$,设 $\bar{r}-r=dn+\lambda r_u+\mu r_v$,$d=$常数.

$$\bar{r}_u-r_u=dn_u+\frac{\partial\lambda}{\partial u}r_u+\lambda r_{uu}+\frac{\partial\mu}{\partial u}r_v+\mu r_{vu},$$

$$\bar{r}_v-r_v=dn_v+\frac{\partial\lambda}{\partial v}r_u+\lambda r_{uv}+\frac{\partial\mu}{\partial v}r_v+\mu r_{vv}.$$

根据习题 1,r 和 $\bar{r}$ 的切平面是平行的,所以

$$r_u\cdot n=0,\quad r_v\cdot n=0,\quad \bar{r}_u\cdot n=0,\quad \bar{r}_v\cdot n=0.$$

把上面两个式子分别点乘 n.注意:

$$L=r_{uu}\cdot n,\quad M=r_{uv}\cdot n,\quad N=r_{vv}\cdot n.$$

所以有

$$\lambda r_{uu}\cdot n+\mu r_{uv}\cdot n=\lambda L+\mu M=0,$$

$$\lambda r_{uv}\cdot n+\mu r_{vv}\cdot n=\lambda M+\mu N=0.$$

由于

$$LN-M^2=K(EG-F^2)>0,\Rightarrow\lambda=\mu=0,$$

所以

$$\bar{r}-r=dn.$$

这说明:直线 $P\bar{P}/\!/n$,即直线垂直于 P 点或 $\bar{P}$ 点的切平面.

3 解 取 M 上的曲率线网为曲纹坐标网,则坐标曲线的切方向 r_u 和 r_v 是主方向.根据 Rodrigues 定理,$dn=-kdr$,其中 k 是主曲率,所以

$$n_u=-k_1r_u,\quad n_v=-k_2r_v.$$

其中 k_1 和 k_2 分别是主曲率.下面要指出:$\bar{r}_u$ 和 $\bar{r}_v$ 也是 $\bar{P}$ 点处的主方向,因此:要证明 $\bar{F}=\bar{M}=0$.

根据习题 2,$\bar{r}=r+dn$,所以

$$\bar{F}=\bar{r}_u\cdot\bar{r}_v=(r_u+dn_u)\cdot(r_v+dn_v)$$
$$=(1-dk_1)r_u\cdot(1-dk_2)r_v=0,$$
$$\bar{M}=\bar{r}_{uv}\cdot n=[(1-dk_1)r_u]'_v\cdot n$$
$$=(1-dk_1)r_{uv}\cdot n-d\frac{\partial k_1}{\partial u}r_u\cdot n$$
$$=0.$$

所以 $\bar{r}_u$ 和 $\bar{r}_v$ 是 M 在 $\bar{P}$ 点处的主方向.显然,

$$\bar{r}_u=(1-dk_1)r_u /\!/ r_u,$$
$$\bar{r}_v=(1-dk_2)r_v /\!/ r_v.$$

4 解 根据 Rodrigues 定理,

$$\bar{n}_u=-\bar{k}_1\bar{r}_u=-\bar{k}_1(1-dk_1)r_u,$$

但是
$$\bar{n}=-n,$$
所以
$$\bar{n}_u=-n_u=k_1r_u,$$
故
$$\bar{k}_1=\frac{-k_1}{1-dk_1},\quad \frac{1}{k_1}+\frac{1}{\bar{k}_1}=\frac{1}{k_1}-\frac{1-dk_1}{k_1}=d.$$
同理
$$\bar{k}_2=\frac{-k_2}{1-dk_2},\quad \frac{1}{k_2}+\frac{1}{\bar{k}_2}=\frac{1}{k_2}-\frac{1-dk_2}{k_2}=d.$$

$$\frac{1}{2}(\bar{k}_1+\bar{k}_2)=-\frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{1-dk_1}+\frac{k_2}{1-dk_2}\right)\neq\frac{1}{2}(k_1+k_2).$$

5 证明 $\iint_M H(P)\mathrm{d}A=\iint_M H(\bar{P})\mathrm{d}\bar{A}$,其中 $d\bar{A}=|\bar{r}_u\times\bar{r}_v|=(1-dk_1)(1-dk_2)\cdot\mathrm{d}A$.

$$\iint_M H(\bar{P})\mathrm{d}\bar{A}$$
$$=\iint_M -\frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{1-dk_1}+\frac{k_2}{1-dk_2}\right)(1-dk_1)(1-dk_2)\mathrm{d}A$$

$$= \iint_M -\frac{1}{2}[k_1(1-dk_2)+k_2(1-dk_1)]\mathrm{d}A$$

$$= -\iint_M H(P)\mathrm{d}A + d\iint_M K\mathrm{d}A.$$

根据高斯－波涅公式，$\iint_M K\mathrm{d}A = 4\pi$，所以

$$\iint_M H(P)\mathrm{d}A = 2\pi d.$$

习题 4.4

1 解 $2(1-g)=\chi(M)=\iint_M K\mathrm{d}A>0$，

所以 $g=0$.

2 解 $2(1-g)=I(P)=0$，

所以 $g=1$.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝微分几何学习指导与习题选解
作者＝梅向明　　王汇淳编
页数＝２０９
ＳＳ号＝１１２１４７３４
出版日期＝２００４年０１月第１版

前言
目录
目录

习题４．１．１
习题４．１．２
习题４．１．３
习题４．１．４
习题４．１．５
习题４．１．６
习题４．２．１
习题４．２．２
习题４．２．４
习题４．３．３
习题４．４